УДК 519.216 - Случайные процессы. Общие вопросы

Плотность распределение вероятности производной случайного процесса

Михаил Батанов-Гаухман

к.т.н., доцент каф. 207 Института № 2 “Авиационные и ракетные двигатели и энергетические установки” ФГБОУВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», Волоколамское шоссе, д.4, г. Москва, 125993, alsignat@yandex.ru, ORCID iD 0000-0002-8179-6113)

Дата: 28 сентября 2021

Аннотация: В статье предлагается способ (процедура) получения функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) производной дифференцируемого стационарного (или псевдо-стационарного) случайного процесса при известной одномерной ФПРВ данного процесса. Показано, что предлагаемая процедура с точность до коэффициента пропорциональности совпадает с квантово - механическим переходом от координатного к импульсному представлению состояния элементарной частицы. На основании детального анализа свойств дифференцируемого случайного процесса сделано предположение, что отношение редуцированной постоянной Планка к массе элементарной частицы может быть выражено через отношение усредненных характеристик стационарного случайного процесса, в котором участвует данная частица. Вместе с тем, показано, что предложенная в статье процедура пригодна для получения ФПРВ производной дифференцируемого стационарного (или псевдо-стационарного) случайного процесса любого масштаба. Результаты, полученные в данной статье применимы в различных отраслях статистической физики в частности при исследовании свойств шероховатых поверхностей

Ключевые слова: стационарный дифференцируемый случайный процесс, производная случайного процесса, постоянная Планка, шероховатая поверхность

Список сокращений и определений

ПССП – псевдо-стационарным случайный процесс;
ССП – стационарный случайный процесс;
ФПРВ – функция плотности распределения вероятности;
ПАВ – плотность амплитуды вероятности;
Пико-частица – частица с характерными размерами ~ $10^{-8} - 10^{-14}$ см.

The Probability Density Function of Derivative of a Random Process

Mikhail Batanov-Gaukhman

Ph.D., Associate Professor, Institute No. 2 “Aircraft, rocket engines and power plants”,
Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Moscow Aviation Institute (National Research University)”, Volokolamsk highway 4, Moscow, Russian Federation (alsignat@yandex.ru), ORCID iD 0000-0002-8179-6113)

Data: 28 September 2021

Abstract: The article proposes a method (procedure) for obtaining the probability density function (PDF) of the derivative of a differentiable stationary (or pseudo-stationary) random process with a known one-dimensional PDF of this process. It is shown that the proposed procedure, up to the proportionality coefficient, coincides with the quantum-mechanical transition from the coordinate to the momentum representation of the state of an elementary particle. Based on a detailed analysis of the properties of a differentiable random process, it was assumed that the ratio of the reduced Planck constant to the mass of an elementary particle can be expressed through the ratio of the averaged characteristics of a stationary random process in which this particle participates. At the same time, it is shown that the procedure proposed in the article is suitable for obtaining the PDF of the derivative of a differentiable stationary (or pseudo-stationary) random process of any scale. The results obtained in this article are applicable in various branches of statistical physics, in particular, in the study of the properties of rough surfaces.

Keywords: Stationary differentiable random process, derivative of a random process, Planck's constant, rough surface

1 ВВЕДЕНИЕ

Определение способа нахождения функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) производной дифференцируемого случайного процесса при известной одномерной ФПРВ данного процесса является ключом к решению ряда задач статической физики и стохастической квантовой механики.

Например, предложенный в этой статье способ получения ФПРВ производной случайного процесса {смотрите выражения (34) – (37)} позволяет обосновать квантово-механическую процедуру перехода от координатного представления состояния элементарной частицы к ее импульсному представлению {смотрите выражения (42) – (43)}. При этом данный результат получен на основании исследования свойств случайного процесса, т.е. без привлечения феноменологической гипотезы Луи де Бройля о существовании волн материи.

Это становится возможным в силу того, что импульс частицы линейно связан с производной ее координаты по времени. Например, x-составляющая вектора импульса частицы, движущейся в направлении оси X со скоростью v_x, задается выражением

$$p_x = mv_x = m\,\partial x/\partial t = mx'. \qquad (1)$$

Предложенное в данной статье решение проблемы получения ФПРВ производной случайного процесса при известной одномерной ФПРВ высот неровностей того же процесса позволяет предложить дополнительные методы исследования свойства и характеристик случайных процессов, например, шероховатых поверхностей.

2 МЕТОД

Рассмотрим несколько реализаций случайного процесса $\xi(t)$, показанных на рис. 1.

В общем случае рассматриваемый случайный процесс нестационарный, но будем исходить из того, что все усредненные характеристики этого процесса в сечении t_i незначительно отличаются от аналогичных его усредненных характеристик в близлежащем сечении t_j.

То есть потребуем, чтобы все начальные и центральные моменты этого процесса в сечении t_i были приближенно равны соответствующим начальным и центральным моментам в сечении t_j при $\tau = t_j - t_i$ стремящемуся к нулю. Например,

$$\overline{\xi(t_i)} \approx \overline{\xi(t_j)}; \quad \overline{\xi^2(t_i)} \approx \overline{\xi^2(t_j)} \text{ и т.д.} \qquad (2)$$

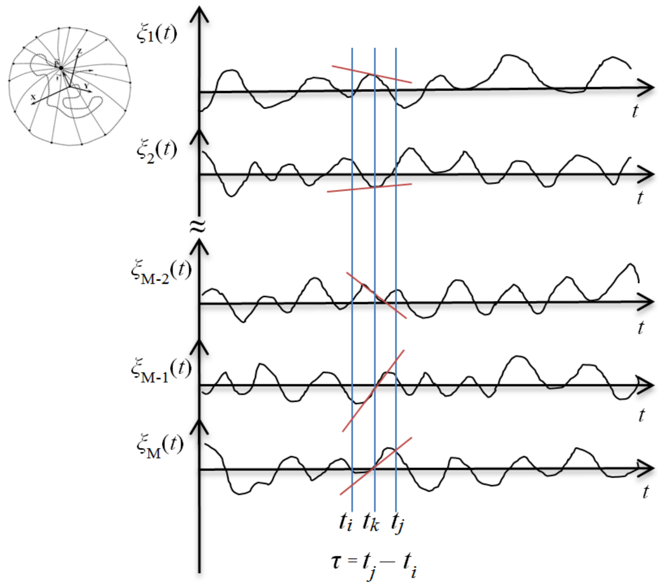


Рис. 1. Реализации дифференцируемого случайного процесса $\xi(t)$. Данные реализации можно интерпретировать как, например, изменения со временем t проекции места нахождения блуждающей частицы на ось ξ, или как сечения однородной и изотропной шероховатой поверхности (в этом случае параметр t играет роль расстояния, т.е. $t = r$)

Другими словами рассматриваемый случайный процесс $\xi(t)$ либо стационарный (в узком смысле), либо близок к нему. Однако в каждом сечении t_m все усредненные характеристики такого процесса остаются неизменными. Для удобства будем называть такой процесс «псевдо-стационарным случайным процессом» (ПССП).

Все выводы и заключения в отношении ПССП, сделанные в этой статье, относятся и к стационарному случайному процессу (ССП).

Отметим вначале общие свойства первой производной ПССП $\xi(t)$. Из реализаций на рис. 1 видно, что величины $\xi(t_k)$ в сечении t_k и производные этого процесса в том же сечении $\xi'(t_k) = \dfrac{\partial \xi(t_k)}{\partial t}$ являются независимыми, а следовательно, и некоррелированными, случайными величинами. Данное утверждение может быть выражено аналитически [1]

$$< \xi(t_k)\xi'(t_k) > = < \frac{d}{dt}\frac{1}{2}[\xi(t_k)]^2 > = \frac{1}{2}\frac{d}{dt} < [\xi(t_k)]^2 > = 0, \qquad (3)$$

где < > означает усреднение по реализациям. Здесь учтено, что операции дифференцирования и усреднения в данном случае являются коммутативными, и что все усредненные характеристики ПССП в каждом его сечении являются постоянными величинами, в том числе $<[\xi(t_k)]^2>=const$.

Однако даже при статистической независимости случайных величин $\xi(t_k)=\xi_k$ и $\xi'(t_k)=\xi_k'$ некая связь между ФПРВ $\rho(\xi_k)$ и ФПРВ $\rho(\xi_k')$ существует. Это вытекает из известной процедуры получения ФПРВ $\rho(\xi_k')$ производной случайного процесса при известной двухмерной ФПРВ данного процесса [1, 2]

$$\rho(\xi_i,\xi_j)=\rho(\xi_i,t_i;\xi_j,t_j). \tag{4}$$

Для этого в выражении (4) необходимо сделать замену переменных

$$\xi_i=\xi_k-\frac{\tau}{2}\xi_k'; \quad \xi_j=\xi_k+\frac{\tau}{2}\xi_k'; \quad t_i=t_k-\frac{\tau}{2}; \quad t_j=t_k+\frac{\tau}{2}, \tag{5}$$

где $\tau=t_j-t_i$; $t_k=\frac{t_j-t_i}{2}$, с якобианом преобразования $[J]=\tau$.

В результате из ФПРВ (4) получим [1, 2]

$$\rho_2(\xi_k,\xi_k')=\lim_{\tau\to 0}\tau\,\rho_2\left(\xi_k-\frac{\tau}{2}\xi_k',\ t_k-\frac{\tau}{2};\ \xi_k+\frac{\tau}{2}\xi_k',\ t_k+\frac{\tau}{2}\right). \tag{6}$$

Далее, интегрируя полученное выражение по ξ_k, найдем искомую ФПРВ производной исходного процесса в сечении t_k [1, 2]:

$$\rho(\xi_k')=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(\xi_k,\xi_k')\,d\xi_k. \tag{7}$$

Формальная процедура (4) – (7) позволяет решить задачу определения ФПРВ $\rho(\xi')$ при известной двухмерной ФПРВ (4). Однако двухмерные ФПРВ определены для ограниченного класса случайных процессов. Поэтому необходимо рассмотреть возможность получения ФПРВ $\rho(\xi')$ при известной одномерной ФПРВ $\rho(\xi)$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующими свойствами случайных процессов:

1. Двухмерная ФПРВ любого случайного процесса может быть представлена в виде [1, 2]

$$\rho(\xi_i,t_i;\xi_j,t_j)=\rho(\xi_i,t_i)\rho(\xi_j,t_j/\xi_i,t_i), \tag{8}$$

где $\rho(\xi_j,\, t_j/\xi_i,\, t_i)$ – условная ФПРВ.

2. Для ПССП справедливо приближенное тождество

$$\rho(\xi_i,t_i)\approx\rho(\xi_j,t_j). \tag{9}$$

3. Условная ФПРВ случайного процесса при $\tau = t_i - t_j$ стремящейся к нулю вырождается в дельта-функцию, т.е.

$$\lim_{\tau\to 0}\rho(\xi_j,t_j/\xi_i,t_i)=\delta(\xi_j-\xi_i). \tag{10}$$

На основании вышеперечисленных свойств, препарируем случайный процесс на участке $[t_i = t_k - \tau/2;\ t_j = t_k + \tau/2]$ при $\tau \to 0$ посредством следующей формальной процедуры.

ФПРВ $\rho(\xi_i) = \rho(\xi_i,t_i)$ в сечении t_i и ФПРВ $\rho(\xi_j) = \rho(\xi_j,t_j)$ в сечении t_j всегда можно представить в виде произведения двух функций

$$\begin{aligned}\rho(\xi_i)&=\varphi(\xi_i)\varphi(\xi_i)=\varphi^2(\xi_i),\\ \rho(\xi_j)&=\varphi(\xi_j)\varphi(\xi_j)=\varphi^2(\xi_j),\end{aligned} \tag{11}$$

где $\varphi(\xi_i)$ – плотность амплитуды вероятности (ПАВ) случайной величины ξ_i в сечении t_i; $\varphi(\xi_j)$ – ПАВ случайной величины ξ_j в сечении t_j.

Для ПССП справедливо приближенное выражение

$$\varphi(\xi_i)\approx\varphi(\xi_j), \tag{12}$$

в чем легко убедиться, взяв квадратный корень от обеих частей (9).

Для ССП приближенное соотношение (12) становится равенством

$$\varphi(\xi_i)=\varphi(\xi_j), \tag{12a}$$

Отметим, что приближенное выражение (12) при $\tau \to 0$ для большинства нестационарных случайных процессов (в том числе для ПССП) так же превращается в равенство

$$\varphi(\xi_i,t_i)=\lim_{\tau\to 0}\varphi(\xi_j,\ t_j=t_i+\tau). \tag{13}$$

При выполнении условия (12) выражение (8) может быть представлено в симметричном виде

$$\rho(\xi_i, \xi_j) \approx \varphi(\xi_i)\rho(\xi_j / \xi_i)\varphi(\xi_j), \tag{14}$$

где $\rho(\xi_j / \xi_i)$ – условная ФПРВ.

Запишем выражение (14) в развернутом виде

$$\rho\left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right] \approx$$
$$\approx \left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}\right]\rho\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2} / \xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}\right]\varphi\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right]. \tag{15}$$

Устремим в (15) τ к нулю, но таким образом, чтобы данный интервал равномерно слева и справа стягивался к параметру $t_k = (t_j - t_i)/2$, тогда с учетом (10) из (14) получим точное равенство

$$\lim_{\tau \to 0} \rho(\xi_i, \xi_j) = \lim_{\tau \to 0} \left\{\varphi(\xi_i)\rho(\xi_j / \xi_i)\varphi(\xi_j)\right\} = \varphi(\xi_{ik})\delta(\xi_{jk} - \xi_{ik})\varphi(\xi_{jk}), \tag{16}$$

где ξ_{ik} – результат стремления случайной величины $\xi(t_i)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ слева; ξ_{jk} – результат стремления случайной величины $\xi(t_j)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ справа.

Проинтегрировав обе части выражения (16) по ξ_{ik} и ξ_{jk}, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik})\delta(\xi_{jk} - \xi_{ik})\varphi(\xi_{jk}) d\xi_{ik} d\xi_{jk} = 1. \tag{17}$$

Выражение (17) является формальным математическим тождеством из теории обобщенных функций, учитывающим свойства δ-функции. Для того, чтобы наполнить выражение (17) физическим содержанием, необходимо задать конкретный вид δ-функции.

Определим вид δ-функции для марковского случайного процесса. Рассмотрим непрерывный случайный марковский процесс, для которого справедлива одна из записей сокращенного уравнения Фоккера - Планка

$$\frac{\partial \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial t} = B \frac{\partial^2 \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial \xi^2}, \tag{18}$$

где B – коэффициент диффузии.

Это дифференциальное уравнение параболического типа имеет три решения, одно из которых может быть представлено в виде [1, 2]

$$\rho\left(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_j - \xi_i) - q^2 B(t_j - t_i)\} dq, \qquad (19)$$

где q – обобщенная частота.

При $\tau = t_j - t_i \to 0$ из (19) получим одно из определений δ-функции

$$\lim_{\tau\to 0} \rho(\xi_j / \xi_i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dq = \delta(\xi_j - \xi_i). \qquad (20)$$

Поскольку данный результат получен для предельного случая $\tau \to 0$*, то не исключено, что* δ*-функция (20) может соответствовать не только диффузионному марковскому случайному процессу, но и многим другим стационарным и нестационарным случайным процессам. Другими словами можно было сразу предположить что* δ*-функция для ПССП имеет вид (20) не обращаясь к уравнению Фоккера - Планка (18).*

Подставив полученную δ-функцию (20) в выражение (17), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dq\right] \varphi(\xi_{jk}) d\xi_{ik}\, d\xi_{jk} = 1. \qquad (21)$$

Поменяв в (21) порядок интегрирования, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \exp\{-iq\xi_{ik}\} d\xi_{ik}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{jk}) \exp\{iq\xi_{jk}) d\xi_{jk}\right] dq = 1. \qquad (22)$$

Учтем, что согласно выражению (13), для ПССП и ССП выполняется условие $\varphi(\xi_{ik}) = \varphi(\xi_{jk})$. Поэтому выражение (22) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q)\varphi^*(q) dq = 1, \qquad (23)$$

где

$$\varphi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{-iq\xi_k\} d\xi_k, \qquad (24)$$

$$\varphi^*(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{iq\xi_k\} d\xi_k. \qquad (25)$$

Подынтегральное выражение $\varphi(q)\varphi^*(q)$ в интеграле (23) отвечает всем требованиям ФПРВ $\rho(q)$ обобщенной частоты q:

$$\rho(q) = \varphi(q)\varphi^*(q) = |\varphi(q)|^2. \tag{26}$$

Выясним теперь, что представляет собой величина q.

Особенности рассматриваемо случайного процесса накладывают на обобщенную частоту q следующие ограничения:

1) q должна быть случайной величиной;

2) величина q должна характеризовать случайный процесс в исследуемом интервале $\tau = t_j - t_i$ (рис. 1) при $\tau \to 0$;

3) величина q должна принадлежать множеству действительных чисел ($q \in R'$), имеющему мощность континуума, т. е. q должна иметь возможность принимать любое значение из диапазона $]-\infty, \infty[$.

Всем трем требованиям удовлетворяют любая из следующих случайных величин, связанных с ПССП (или ССП) на исследуемом временном интервале τ:

$$\xi_i' = \frac{\partial \xi_k}{\partial t},\ \xi_i'' = \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t},\ \ldots,\ \xi_i^{(n)} = \frac{\partial^n \xi_i}{\partial t^n}. \tag{27}$$

Однако эти случайные величины характеризуют ПССП (или ССП) не в равной степени. Рассмотрим одну из реализаций исследуемого процесса. Функция $\xi(t)$ (рис. 1) в интервале $\tau = t_j - t_i$ при $\tau < \tau_{кор}$ (где $\tau_{кор}$ – интервал автокорреляции случайного процесса) может быть разложена в ряд Тейлора-Маклорена

$$\xi(t_j) = \xi(t_i) + \xi'(t_i)\tau + \frac{\xi''(t_i)}{2}\tau^2 + \ldots + \frac{\xi^{(n)}(t_i)}{n!}\tau^n + \ldots \tag{28}$$

Запишем выражение (28) в следующем виде

$$\frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi_i' + \frac{\xi_i''}{2!}\tau + \ldots + \frac{\xi_i^{(n)}\tau^{n-1}}{n!} + \ldots \tag{29}$$

где $\xi(t_i) = \xi_i$, $\xi(t_j) = \xi_j$.

Так же как в (20), устремим τ к нулю, при этом выражение (29) сводится к тождеству

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi'_k , \qquad (30)$$

где $\xi_k = \xi(t_k)$ (рис. 1).

Таким образом, единственной случайной величиной, удовлетворяющей всем вышеперечисленным требованиям на исследуемом временном интервале $[t_i = t_k - \tau/2;\ t_j = t_k + \tau/2]$, при $\tau \to 0$, является первая производная исходного случайного процесса $\xi'_k = \xi'(t_k)$ в сечении t_k. Следовательно, остается положить, что случайная величина q в выражениях (23) – (26) линейно связана только с ξ'_k, т. е.

$$q = \frac{\xi'_k}{\eta}, \qquad (31)$$

где $1/\eta$ – размерный коэффициент пропорциональности.

Приведем дополнительный аргумент в пользу обоснования справедливости выражения (31). Каждой экспоненте, например, из интеграла (24) соответствует гармоническая функция с частотой q

$$\exp\{-iq\xi(t)\} \to \xi_k(t) = A\sin(qt), \qquad (32)$$

это одна из гармонических составляющих случайного процесса $\xi(t)$. При этом каждой частоте q, в свою очередь, соответствует тангенс угла наклона касательной линии к гармонической функции с данной частотой (рис. 2), то есть $q \sim tg\alpha = \xi'(t)$.

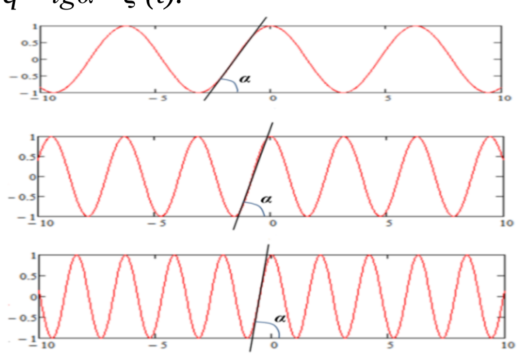


Рис. 2. *Чем больше частота гармонической функции, тем больше угол α между касательной к этой функции и осью t*

Действительно, продифференцировав гармоническую функцию (32), получим связь $\xi_k'(t) = qA\cos(qt)$, *откуда следует*

$$q = \lim_{t \to 0} \frac{\xi_k'}{A\cos(qt)} = \frac{\xi_k'}{A}. \qquad (33)$$

При A = η, выражения (31) и (33) совпадают, что еще раз подтверждает утверждение о том, что обобщенная частота q линейно связана с производной исследуемого случайного процесса $\xi'(t)$.

Подставляя (31) в (23) – (26), получим следующую искомую процедуру получения ФПРВ $\rho(\xi',t)$ производной ПССП (или ССП) $\xi(t)$ в любом сечении t_k при известной одномерной ФПРВ $\rho(\xi,t)$ того же случайного процесса в том же его сечении:

1. Заданная одномерная ФПРВ $\rho(\xi,t)$ представляется в виде произведения двух ПАВ $\varphi(\xi,t)$:

$$\rho(\xi,t) = \varphi(\xi,t)\varphi(\xi,t). \qquad (34)$$

2. Осуществляются два преобразования Фурье

$$\varphi(\xi',t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,t) \exp\{i\xi'\xi/\eta\} d\xi, \qquad (35)$$

$$\varphi * (\xi',t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,t) \exp\{-i\xi'\xi/\eta\} d\xi. \qquad (36)$$

3. Окончательно для произвольного сечения ПССП (или ССП) получим искомую ФПРВ производной

$$\rho(\xi',t) = \varphi(\xi',t)\varphi^*(\xi',t) = \left|\varphi(\xi',t)\right|^2. \qquad (37)$$

Еще раз отметим, что процедура (34) – (37) может быть применима к любым дифференцируемым стационарным и псевдо-стационарным случайным процессам, для которых при $\tau \to 0$ *δ-функция принимает вид (20).*

Для выяснения физического смысла коэффициента η воспользуемся сравнением с известными результатами. Данный подход небезупречен с точки зрения математической строгости, но позволяет достаточно эффективно получить практически значимый результат.

Рассмотрим стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$. При этом в каждом сечение этого процесса случайная величина ξ распределена по гауссовому закону:

$$\rho(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}}\exp\left\{-(\xi-a_\xi)^2/2\sigma_\xi^2\right\}, \tag{38}$$

где $\sigma_\xi{}^2$ и a_ξ – дисперсия и математическое ожидание данного процесса $\xi(t)$.

Осуществляя с ФПРВ (38) последовательность операций (34) – (37), {смотрите выражения (45) – (52)} получим ФПРВ производной этого случайного процесса

$$\rho(\xi')=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left[\eta/2\sigma_\xi\right]^2}}\exp\left\{-\frac{\xi'^2}{2\left[\eta/2\sigma_\xi\right]^2}\right\}. \tag{39}$$

С другой стороны, с помощью известной процедуры (4) – (7) для аналогичного случая получим [2]

$$\rho(\xi')=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi'}^2}}\exp\left\{-\xi'^2/2\sigma_{\xi'}^2\right\}, \tag{40}$$

где
$$\sigma_{\xi'}=\sigma_\xi/\tau_{\xi cor},$$

здесь $\tau_{\xi\,cor}$ – интервал автокорреляции исходного случайного процесса $\xi(t)$.

Сравнивая ФПРВ производной (39) и (40), находим, что при

$$\eta=\frac{2\sigma_\xi^2}{\tau_{\xi\,cor}} \tag{41}$$

они полностью совпадают. При этом величина η носит характер масштабного параметра.

Выражение (41) получено для гауссовского случайного процесса, но среднеквадратическое отклонение σ_ξ и интервал автокорреляции $\tau_{\xi\,cor}$ – это основные характеристики любого псевдо-стационарного и стационарного *случайного процесса. Все остальные начальные и центральные моменты в случае негауссового распределения случайной величины $\xi(t)$ дадут незначительный вклад в выражение (41). Поэтому с высокой степенью достоверности можно утверждать, что выражение (41) применимо для большого класса псевдо-стационарных и стационарных случайных процессов.*

В квантовой механике для перехода от координатного представления волновой функции пико-частицы (т.е. частицы с характерными размерами ~ $10^{-8} - 10^{-14}$ см) к ее импульсному представлению применяется преобразования Фурье [3]

$$\varphi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{ip_x x/\hbar\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{imx'x/\hbar\} dx, \quad (42)$$

$$\varphi*(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{-ip_x x/\hbar\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{-imx'x/\hbar\} dx, \quad (43)$$

где m – масса пико-частицы; $\hbar = 1{,}055\cdot10^{-34}$ Дж/Гц – редуцированная постоянная Планка. В правых частях (42) и (43) учтено выражение (1).

Очевидно, что в случае, когда

$$\eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{x\,cor}} = \frac{\hbar}{m} \quad \text{с размерностью (м}^2\text{/с)}, \quad (44)$$

процедуры (35) – (36) и (42) – (43) полностью совпадают.

Из выражения (44) следует, что в случае изучения хаотического поведения пико-частицы (например, электрона) отношение редуцированной постоянной Планка к массе пико-частицы может быть выражено через основные усредненные характеристики случайного процесса σ_x и $\tau_{x\,\mathrm{cor}}$, в котором она участвует.

3 РЕЗУЛЬТАТЫ

Применим предложенный выше метод для определения ФПРВ производной нескольких стационарных случайных процессов с различными статистиками высот неровностей.

1] *Определим ФПРВ производной стационарного гауссовского случайного процесса*

Пусть в каждой точке $t = r$ ССП $\xi(r)$ случайная величина ξ (в частности, высота неровности) распределена по гауссовому закону

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi1}^2}} exp\{-(\xi - a_{\xi1})^2/2\sigma_{\xi1}^2\}, \tag{45}$$

где $\sigma_{\xi1}{}^2$ и $a_{\xi1}$ – дисперсия и математическое ожидание данного случайного процесса $\xi(r)$.

Согласно (34), представим ФПРВ (45) в виде произведения двух амплитуд вероятности

$$\rho(\xi) = \psi(\xi)\psi(\xi),$$

где

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_{\xi1}^2}} \exp\{-(\xi - a_{\xi1})^2/4\sigma_{\xi1}^2\}. \tag{46}$$

Подставим (46) в (35) и (36)

$$\psi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_{\xi1}^2}} \exp\{-(\xi - a_{\xi1})^2/4\sigma_{\xi1}^2\} \exp\{i\xi'\xi/\eta\} d\xi, \tag{47}$$

$$\psi^*(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_{\xi1}^2}} \exp\{-(\xi - a_{\xi1})^2/4\sigma_{\xi1}^2\} \exp\{-i\xi'\xi/\eta\} d\xi. \tag{48}$$

Выполним интегрирование

$$\psi(\xi') = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\eta^2/(2\sigma_{\xi1})^2}} \exp\{-\xi'^2/[2\eta/(2\sigma_{\xi1})]^2\} \exp\{ia_{\xi1}\xi'/\eta\}, \tag{49}$$

$$\psi^*(\xi') = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\eta^2/(2\sigma_{\xi1})^2}} \exp\{-\xi'^2/[2\eta/(2\sigma_{\xi1})]^2\} \exp\{-ia_{\xi1}\xi'/\eta\}. \tag{50}$$

В соответствии с (37) перемножим амплитуды вероятности (49) и (50), в результате получим

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi'}^2}} \exp\left\{-\xi'^2 / 2\sigma_{\xi'}^2\right\}, \tag{51}$$

где согласно (41)

$$\sigma_{\xi'} = \sigma_{\xi 1} / r_{\mathrm{cor}1} \tag{52}$$

– СКО (т.е. стандартное отклонение) продифференцированного стационарного случайного процесса $\xi'(r) = \xi'$;

$r_{\mathrm{cor}1}$ – радиус автокорреляции исходного ССП $\xi(r) = \xi$ с гауссовым распределением высот неровностей.

2] *Определим ФПРВ производной ССП с равномерным распределением высот неровностей*

Пусть в каждой точке r ССП $\xi(r) = \xi$ случайная величина ξ распределена по равномерному закону в интервале $\xi_1 < \xi < \xi_2$

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1}. \tag{53}$$

Согласно (34), представим ФПРВ (53) в виде произведения двух амплитуд вероятности

$$\rho(\xi) = \psi(\xi)\psi(\xi), \tag{54}$$

где

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi_2 - \xi_1}}. \tag{55}$$

Подставим (55) в (35) и (36)

$$\psi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{\sqrt{\xi_2 - \xi_1}} \exp\{i\xi'\xi / \eta\} d\xi, \tag{56}$$

$$\psi^*(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{\sqrt{\xi_2 - \xi_1}} \exp\{-i\xi'\xi / \eta\} d\xi. \tag{57}$$

В результате вычисления по формуле (56), получим

$$\psi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{\xi_2 - \xi_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\{i\xi'\xi / \eta\} d\xi = \frac{\exp\{i\xi'\xi_2 / \eta\} - \exp\{i\xi'\xi_1 / \eta\}}{i\xi' \sqrt{2\pi(\xi_2 - \xi_1)/\eta}}. \quad (58)$$

Учтем, что $(\xi_2 - \xi_1)/2 = a_{\xi 2}$ – математическое ожидание, $\xi_2 - \xi_1 = l$ – база рассматриваемого ССП $\xi(r)$. Теперь можно записать $\xi_1 = a_{\xi 2} - l/2$ и $\xi_2 = a_{\xi 2} + l/2$, при этом выражение (58) принимает вид

$$\psi(\xi') = \frac{\exp\{i\xi'(a_{\xi 2} + l/2)/\eta\} - \exp\{i\xi'(a_{\xi 2} - l/2)/\eta\}}{i\xi'\sqrt{2\pi l/\eta}} =$$
$$= \frac{\exp\{i\xi' l/(2\eta)\} - \exp\{-i\xi' l/(2\eta)\}}{i\xi'\sqrt{2\pi l/\eta}} \exp\{i\xi' a_{\xi 2}/\eta\}. \quad (59)$$

Используя выражение $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, представим (59) в виде

$$\psi(\xi') = \frac{2\sin\{\xi' l/(2\eta)\}}{\xi'\sqrt{2\pi l/\eta}} \exp\{i\xi' a_{\xi 2}/\eta\}. \quad (60)$$

В результате аналогичных вычислений по формуле (57), получим

$$\psi^*(\xi') = \frac{2\sin\{\xi' l/(2\eta)\}}{\xi'\sqrt{2\pi l/\eta}} \exp\{-i\xi' a_{\xi 2}/\eta\}. \quad (61)$$

Подставляя (60) и (61) в (37), окончательно находим

$$\rho(\xi') = \frac{\sin^2\{\xi' k_2\}}{\xi'^2 \pi k_2}, \quad (62)$$

где
$$k_2 = \frac{l}{2\eta} = \frac{3r_{cor2}}{l} = \frac{3r_{cor2}}{\xi_2 - \xi_1}, \quad (63)$$

r_{cor2} – радиус автокорреляции исходного ССП $\xi(r) = \xi$ с равномерным распределением высот неровностей.

Здесь учтено, что согласно (41)

$$\eta = \frac{2\sigma_{\xi 2}^2}{r_{cor2}} = \frac{l^2}{6r_{cor2}}, \quad (64)$$

где $\sigma_{\xi 2}^2 = \dfrac{l^2}{12} = \dfrac{(\xi_2 - \xi_1)^2}{12}$ – дисперсия ССП $\xi(r) = \xi$ с равномерным распределением высот неровностей (53).

Таким образом, для ССП $\xi(r) = \xi$ с равномерным распределением высот неровностей, ФПРВ $\rho(\xi')$ его производной ξ' является распределение типа $\sin^2\xi'/\xi'^2$ (62) с параметром k_2 (63).

3] *Определим ФПРВ производной ССП с лапласовым распределением высот неровностей*

Пусть в каждой точке r ССП $\xi(r) = \xi$ случайная величина ξ распределена по закону Лапласа

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2\mu_L}\exp\{-\left|\xi - a_{\xi 3}\right| / \mu_L\}, \tag{65}$$

где $1/\mu_L$ – параметр масштаба данного процесса $\xi(r) = \xi$;

$a_{\xi 3}$ – параметр сдвига (математическое ожидание).

Согласно (34), представим ФПРВ (65) в виде произведения двух амплитуд вероятности

$$\rho(\xi) = \psi(\xi)\psi(\xi), \tag{66}$$

где
$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{1}{2\mu_L}}\exp\{-\left|\xi - a_{\xi 3}\right| / 2\mu_L\}. \tag{67}$$

Подставим (67) в (35) и (36)

$$\psi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2\mu_L}}\exp\{-\left|\xi - a_{\xi 3}\right| / 2\mu_L\}\exp\{i\xi'\xi/\eta\}d\xi\,, \tag{68}$$

$$\psi*(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2\mu_L}}\exp\{-\left|\xi - a_{\xi 3}\right| / 2\mu_L\}\exp\{-i\xi'\xi/\eta\}d\xi\,. \tag{69}$$

Переставим эти выражения в следующем виде

$$\psi(\xi') = \frac{2}{\sqrt{4\pi\mu_L}}\int_{a_{\xi 3}}^{\infty}\exp\{-(\xi - a_{\xi 3})/2\mu_L - i\xi'\xi/\eta\}d\xi\,, \tag{70}$$

$$\psi*(\xi') = \frac{2}{\sqrt{4\pi\mu_L}}\int_{-\infty}^{a_{\xi 3}}\exp\{-(\xi - a_{\xi 3})/2\mu_L + i\xi'\xi/\eta\}d\xi. \tag{71}$$

Выполним интегрирование

$$\psi(\xi') = \sqrt{\frac{\mu_L \eta}{\pi}} \frac{\exp(a_{\xi3} / 2\mu_L - a_{\xi3})}{\eta / 2 + i\xi'\mu_L}, \tag{72}$$

$$\psi^*(\xi') = \sqrt{\frac{\mu_L \eta}{\pi}} \frac{\exp(-a_{\xi3} / 2\mu_L + a_{\xi3})}{\eta / 2 - i\xi'\mu_L}. \tag{73}$$

Подставляя (72) и (73) в (37), находим

$$\rho(\xi') = \frac{\mu_L \eta}{\pi(\eta^2 / 4 + \xi'^2 \mu_L^2)}. \tag{74}$$

Дисперсия распределения Лапласа (65) равна $\sigma_{\xi3}^2 = 2\mu_L^2$, поэтому, согласно (41), в данном случае масштабный параметр имеет вид

$$\eta = \frac{4\mu_L^2}{r_{cor3}}, \tag{75}$$

где r_{cor3} – радиус автокорреляции исходного ССП $\xi(r) = \xi$ с лапласовым распределением высот неровностей.

Подставляя масштабный параметр (75) в выражение (74), получим

$$\rho(\xi') = \frac{k_3}{\pi(k_3^2 + \xi'^2)}, \tag{76}$$

где $k_3 = \dfrac{2\mu_L}{r_{cor3}}$ – параметр преобразования.

Таким образом, для лапласовского ССП $\xi(r) = \xi$ ФПРВ $\rho(\xi')$ его производной ξ' является распределение Коши (76) с математическим ожиданием (т.е. параметром сдвига) равным нулю.

4] *ФПРВ производной ССП с распределением высот неровностей по закону Коши*

Пусть в каждой точке r ССП $\xi(r) = \xi$ случайная величина ξ распределена по закону Коши

$$\rho(\xi) = \frac{\mu_K}{\pi[\mu_K^2 + (\xi - a_{\xi4})^2]}, \tag{77}$$

где μ_K – параметр масштаба данного процесса $\xi(r)$; $a_{\xi4}$ – параметр сдвига.

Выполняя действия (34) – (37) обратные преобразованиям (68) – (74), получим

$$\rho(\xi') = \frac{1}{2k_4}\exp\{-|\xi'|/k_4\}. \tag{78}$$

Для нахождения параметра k_4 отметим, что дисперсия распределения Коши, как известно, не определена и стремится к бесконечности, но высоты неровностей реальных поверхностей могут быть распределены только по усеченному закону Коши с эффективной дисперсией $\sigma_{\xi 4}^2 \sim 25\mu_K^2$. Поэтому в данном случае согласно (41) можно записать

$$\eta \approx \frac{50\mu_K^2}{r_{cor4}}, \tag{79}$$

где r_{cor4} – радиус автокорреляции исходного ССП $\xi(r) = \xi$ с распределением высот неровностей ξ по закону Коши (77).

В этом случае получим следующую оценку параметра преобразования

$$k_4 \approx 2\mu_K/\eta \approx \frac{r_{cor4}}{25\mu_K}. \tag{80}$$

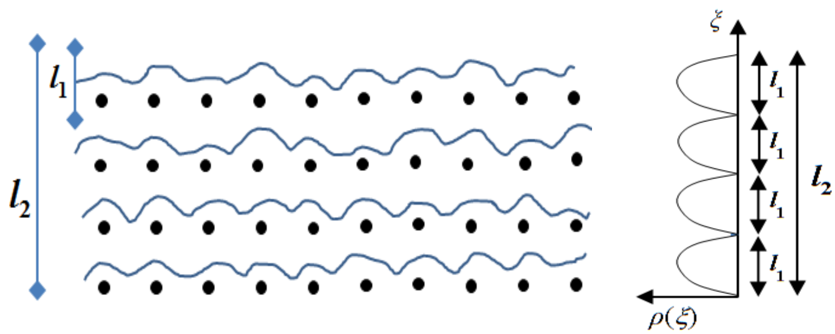
Таким образом, для ССП с распределением высот неровностей $\xi(r) = \xi$ по закону Коши (77) ФПРВ $\rho(\xi')$ его производной ξ' является распределением Лапласа (78) с параметром преобразования (80) и параметром сдвига равным нулю.

5] *ФПРВ производной ССП с распределением высот неровностей по многослойному синусоидальному закону*

Пусть в каждой точке r ССП $\xi(r) = \xi$ случайная величина ξ распределена по многослойному синусоидальному закону

$$\rho(\xi) = \begin{cases} \dfrac{2\sin^2(\pi n_1 \xi / l_2)}{l_2} & при\ \xi \in [0, l_2]; \\ 0 & при\ \xi \notin [0, l_2], \end{cases} \tag{81}$$

где l_1 – толщина одного (первого) слоя (рис. 3*а*,*б*); n_1 – число неровных слоев (например, кристалла) синусоидального типа, наложенных друг на друга в интервале $[0,\ l_2]$, здесь $l_2 = n_1 l_1$ – глубина многослойной поверхности кристалла.



а) *б*)

Рис. 3 *а*) Многослойная поверхность (например, кристалла), при этом каждый слой рассматривается как отдельная неровная поверхность синусоидального типа; *б*) Многогорбая синусоидальная ФПРВ высот неровностей многослойной поверхности

Согласно (34), представим ФПРВ (81) в виде произведения двух амплитуд вероятности

$$\rho(\xi) = \psi(\xi)\psi(\xi),$$

где
$$\psi(\xi) = \sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin(\pi n_1 \xi / l_2). \tag{82}$$

Подставим (82) в (35) и (36)

$$\psi^*(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{l_2}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin(\pi n_1 \xi / l_2)\exp\{i\xi'\xi/\eta\}d\xi\,, \tag{83}$$

$$\psi^*(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{l_2}\sqrt{\frac{2}{l_2}}\sin(\pi n_1 \xi / l_2)\exp\{-i\xi'\xi/\eta\}d\xi\,.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\psi(\xi') = -\sqrt{\frac{1}{4\pi l_2}}\left(\frac{e^{i(\pi n_1 + \xi' l_2/\eta)} - 1}{(\pi n_1 / l_2 + \xi'/\eta)} + \frac{e^{-i(\pi n_1 - \xi' l_2/\eta)} - 1}{(\pi n_1 / l_2 - \xi'/\eta)}\right), \tag{84}$$

$$\psi^*(\xi') = -\sqrt{\frac{1}{4\pi l_2}}\left(\frac{e^{i(\pi n_1 - \xi' l_2/\eta)} - 1}{(\pi n_1 / l_2 - \xi'/\eta)} + \frac{e^{-i(\pi n_1 + \xi' l_2/\eta)} - 1}{(\pi n_1 / l_2 + \xi'/\eta)}\right). \tag{85}$$

Подставляя (84) и (85) в (37), находим

$$p(\xi') = \psi(\xi')\psi^*(\xi') = \frac{1}{\pi l_2}\left(\frac{\cos^2(\pi n_1) - \cos(\pi n_1)\cos(\xi' l_2/\eta)}{\left(\pi n_1/l_2\right)^2 - \left(\xi'/\eta\right)^2} - \frac{\cos(\pi n_1 + \xi' l_2/\eta) - 1}{\left(\pi n_1/l_2 + \xi'/\eta\right)^2}\right). \tag{86}$$

Дисперсия многогорбого синусоидального распределения (81) равна

$$\sigma_{\xi 4}^2 = \frac{l_2^2(\pi^2 n_1^2 - 6)}{12\pi^2 n_1^2} = \frac{l_1^2 n_1^2(\pi^2 n_1^2 - 6)}{12\pi^2 n_1^2} = \frac{l_1^2(\pi^2 n_1^2 - 6)}{12\pi^2}. \tag{87}$$

Поэтому в этом случае, согласно (41), имеем масштабный параметр

$$\eta = \frac{2\sigma_{\xi 41}^2}{r_{cor5}} = \frac{l_1^2(\pi^2 n_1^2 - 6)}{6\pi^2 r_{cor5}}, \tag{88}$$

где r_{cor5} – радиус автокорреляции одного неровного слоя синусоидального типа.

ФПРВ (88) может быть представлена в виде

$$p(\xi') = \frac{1}{\pi l_2}\left(\frac{\cos(\pi n_1)\left[\cos(\pi n_1) - \cos(\xi' l_2/\eta)\right]}{\left(\pi n_1/l_2\right)^2 - \left(\xi'/\eta\right)^2} - \frac{\cos(\pi n_1 + \xi' l_2/\eta) - 1}{\left(\pi n_1/l_2 + \xi'/\eta\right)^2}\right). \tag{89}$$

С учетом тригонометрической формулы

$$\cos x - \cos y = 2\sin\left(\frac{y+x}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

из выражения (89) получим еще один вид искомой ФПРВ

$$p(\xi') = \frac{1}{\pi l_2}\left(\frac{2\cos(\pi n_1)\sin\left(\frac{\xi' l_2/\eta + \pi n_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\xi' l_2/\eta - \pi n_1}{2}\right)}{\left(\pi n_1/l_2\right)^2 - \left(\xi'/\eta\right)^2} - \frac{\cos(\pi n_1 + \xi' l_2/\eta) - 1}{\left(\pi n_1/l_2 + \xi'/\eta\right)^2}\right). \tag{90}$$

Таким образом, для ССП с многогорбой синусоидальной ФПРВ высот неровностей (81) ФПРВ $\rho(\xi')$ его производной ξ' является распределение (86) [или в ином виде (90)] с масштабным параметром (88).

С помощью формальной процедуры (34) – (37) могут быть получены ФПРВ $\rho(\xi')$ производной ξ' для многих других ССП с различными статистиками высот неровностей ξ, которые могут быть использованы во многих задачах статической физики. В частности ФПРВ $\rho(\xi')$ могут быть использованы при исследованиях параметров статистически неровных (шероховатых) поверхностей.

3 ВЫВОДЫ

Отметим следующие результаты:

1] На основании анализа псевдо-стационарного и стационарного случайных процессов получена процедура (34) – (37) для получения ФПРВ $\rho(\xi')$ производной ξ' исследуемого процесса при известной одномерной ФПРВ $\rho(\xi)$ высот его неровностей.

2] Процедура (34) – (37) с точностью до коэффициента пропорциональности η_x (44) совпадает с процедурой перехода от координатного представления квантово-механической системы к ее импульсному представлению (42) – (43). Но квантово-механическая процедура (42) – (43) получена с привлечением эвристической гипотезы о возможном существовании волн материи де Бройля. Тогда как процедура (34) – (37) получена на основании глубокого анализа дифференцируемого ССП с единственным предположением, что дельта-функция $\delta(x_j - x_i)$ имеет вид (20).

В этой связи интересно проанализировать, к каким процедурам перехода от ФПРВ $\rho(x)$ к ФПРВ $\rho(x')$ могут привести другие виды δ-функции?

Вместе с тем, область применения квантово-механической процедуры (42) – (43) ограничена малостью редуцированной постоянной Планка $\hbar$, поэтому пригодна только для пикоскопических систем, тогда как процедуры (34) – (37) могут быть применены для дифференцируемых стационарных и псевдо-стационарных случайных процессов любого масштаб, смотрите, например, [4,5].

К таким микро- и макроскопическим случайным процессам можно отнести: неровность шероховатой поверхности, трек хаотического колебания центра масс ядра биологической клетки; трек хаотического перемещения кончика ветки дерева под влиянием порывов ветра; трек блуждания центра масс косяка рыб в океане; трек хаотического перемещения центра масс ядра планеты; возмущения границы раздела двух сред и т.д.

3] При стохастическом подходе к исследованию хаотического поведения пикоскопических частиц, отношение редуцируемой постоянной Планка к массе пико-частицы может быть выражено с помощью соотношения (44) через основные характеристики σ_x и $\tau_{x\ cor}$ исследуемого случайного процесса.

4 БЛАГОДАРНОСТИ

Благодарим Д. Рида, Г.И. Шипова и к.ф-м.н В. А. Лукьянова за ценные комментарии и замечания, сделанные при подготовке статьи. Также выражаем благодарность д.т.н А.А. Кузнецову и д.ф-м.н А.И. Козлову. Была важна поддержка к.пс.н. Т.С. Леви, А.Н. Маслова, Л.А. Батановой, А.Ю. Болотова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.М. Рытов *Введение в статистическую радиофизику Ч.1*. Наука, Москва, (1976), с. 494.
2. В.И. Тиханов *Статистическая радиофизика.* Радио и связь, Москва, (1982), с. 622.
3. Д.И. Блохинцев *Основы квантовой механики*. Высшая школа, Москва, (1963), с. 620.
4. M. Batanov-Gaukhman *The Diffraction of Microparticles on Single-layer and Multi-layer Statistically Uneven Surfaces*, (2020) [v2] arXiv:2007.13527.
5. M. Batanov-Gaukhman *Stochastic Model of Microparticle Scattering On a Crystal* Avances en Ciencias e Ingeniería (ISSN: 0718-8706), vol. 12 №3. https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-12-nro-3-ano-2021-articulo-4/