2.1.3. Тензор 4-напряжений

В предыдущих пунктах были введены формальные представления о 4-деформациях *внешней* и *внутренней* сторон одного и того же участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума.

Теперь введем формальные представления о 4-напряжениях исследуемого участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума, подобно тому, как это делается в теории упругости. Для этого будем придерживаться классического курса теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М.Лифшица [4, 5].

Любой физический объект, в том числе выделенный объем V протяженности $\lambda_{m\div n}$-вакуума, может быть задан в виде интеграла действия [5]

$$S = \int L(q,\ \partial q/\partial x^i)\, dVdt = 1/c \int Y d\Omega\,, \qquad (2.1.46)$$

где $d\Omega = cdt\ dV$;

L – некоторая функция от величин q, определяющих состояние системы и их производных по координатам и времени;

$\int LdV$ – функция Лагранжа системы, такая что Y можно рассматривать как «плотность» функции Лагранжа.

Математическим выражением замкнутости системы является отсутствие явной зависимости L от x^i, подобно тому, как функция Лагранжа для замкнутой механической системы не зависит явно от времени.

Уравнения движения получаются согласно принципу наименьшего действия путем варьирования интеграла действия (2.1.46). Имеем (для краткости обозначим $q_{,i} \equiv \partial q/\partial x^i$):

$$\delta S = 1/c\int(\partial L/\partial q\,\delta q + \partial L/\partial q_{,i}\,\delta q_{,i})d\Omega =$$
$$= 1/c\int[\partial L/\partial q\,\delta q + \partial/\partial x^i\,(\partial L/\partial q_{,i}\delta q) - \delta q\,\partial/\partial x^i\,(\partial L/\partial q_{,i})]d\Omega = 0.$$

Второй член под интегралом, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает при интегрировании по всему пространству, при этом получаются следующие «уравнения движения» [5]:

$$\partial/\partial x^i\,(\partial L/\partial q_{,i}) - \partial L/\partial q = 0 \qquad (2.1.47)$$

(подразумевается суммирование по дважды повторяющемуся индексу i).

Дальнейшие выкладки аналогичны выводу закона сохранения энергии. Именно:

$$\partial L/\partial x^i = \partial L/\partial q\ \partial q/\partial x^i + \partial L/\partial q_{,k}\,\partial q_{,k}/\partial x^i.$$

Подставляя сюда (2.1.47) и замечая, что $q_{,k,i} = q_{,i,k}$, находим [5]:

$\partial L/\partial x^i = \partial/\partial x^k\,(\partial L/\partial q_{,k})\,q_{,i} + \partial L/\partial q_{,k}\,\partial q_{,i}/\partial x^k = \partial/\partial x^k\,(q_{,i}\,\partial L/\partial q_{,k})$.

Заменив в левой стороне равенства

$$\partial L/\partial x^i = \delta_i^k\,\partial L/\partial x^k$$

и введя обозначение

$$T_i^k = q_{,i}\,\partial L/\partial q_{,k} - \delta_i^k\,L, \qquad (2.1.48)$$

напишем полученное соотношение в виде закона сохранения [5]:

$$\partial T_i^k/\partial x^k = 0. \qquad (2.1.49)$$

Если имеется не одна, а несколько величин $q^{(l)}$, то вместо (2.1.49) надо писать:

$$T_i^k = \sum_l \frac{q_{,i}^{(l)}\partial L}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k L\,.$$

Уравнение (2.1.49) эквивалентно утверждению, что сохраняется вектор

$$P^i = \mathrm{const}\int T^{ik}\,dS_k, \qquad (2.1.50)$$

где dS_k – элемент четырехмерной гиперповерхности.

Этот вектор должен быть отождествлен с 4-импульсом системы. Постоянный множитель перед интегралом выбирается так, чтобы временная компонента P^0 в соответствии с прежним определением была равна энергии системы, деленной на c. Для этого замечаем, что

$$P^0 = \mathrm{const}\int T^{0k}\,dS_k = \mathrm{const}\int T^{00}dV,$$

где интегрирование проводится по всей гиперповерхности, перпендикулярной к оси x^0. С другой стороны, согласно (2.1.48), имеем [5]:

$$T^{00} = \frac{\dot q\,\partial L}{\partial \dot q} - L, \qquad (2.1.51)$$

где $\dot q \equiv \dfrac{\partial q}{\partial t}$.

В соответствии с обычной формулой, связывающей энергию с функцией Лагранжа, эту величину надо рассматривать как плотность энергии, и поэтому $\int T^{00}dV$ есть полная энергия системы. При const = $1/c$ получается окончательное выражение для 4-импульса системы [5]

$$P^i = 1/c \int T^{ik}\, dS_k\,. \qquad (2.1.52)$$

Тензор T^{ik} называется тензором энергии-импульса системы или, как выяснится ниже, тензором 4-напряжений.

Определение тензора T^{ik} однозначно. Если T^{ik} – это тензор, определенный согласно (2.1.48), то и всякий другой тензор вида

$$T^{ik} + \partial\psi^{ikl}/\partial x^l, \qquad \psi^{ikl} = -\psi^{ilk}, \qquad (2.1.53)$$

удовлетворяет уравнению сохранения (2.1.49), так как верно тождество

$$\partial^2\psi^{ikl} / \partial x^k \partial x^l = 0, \qquad (2.1.54)$$

ввиду антисимметричности тензора ψ^{ikl} по индексам k,l. Полный 4-импульс системы при этом вообще не изменится, так как [5]

$$\int\left(\frac{\partial\psi^{ikl}}{\partial x^l}\right)dS_k = \frac{1}{2}\int dS_k\left(dS_k\,\frac{\partial\psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l\,\frac{\partial\psi^{ikl}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\oint\psi^{ikl}\,df^*_{kl}\,,$$

где интегрирование с правой стороны равенства производится по трехмерной поверхности, охватывающей гиперповерхность, по которой производится интегрирование с левой стороны равенства. Эта поверхность находится, очевидно, на бесконечности трехмерного пространства. Поскольку искажения локального участка вакуума на бесконечности сходят на нет , этот интеграл равен нулю. Таким образом, 4-импульс системы является, как и следовало ожидать, однозначно определенной величиной.

Для однозначного же определения тензора T^{ik} можно воспользоваться требованием, чтобы тензор момента 4-импульса выражался через 4-импульс посредством выражения [5]

$$M^{ik} = \int(x^i dP^k - x^k dP^i) = 1/c \int(x^i T^{kl} - x^k T^{il})\, dS_l\,, \qquad (2.1.55)$$

т. е. так, чтобы его плотность выражалась через плотность импульса обычной формулой.

Найдем, какому условию должен для этого удовлетворять тензор энергии-импульса (4-напряжений). Закон сохранения момента может быть выражен, равенством нулю дивергенции подынтегрального выражения в M^{ik}.

Таким образом,

$$\partial(x^i T^{kl} - x^k T^{il}) / \partial x^l = 0. \qquad (2.1.56)$$

Замечая, что $\partial x^i/\partial x^l = \delta^i{}_l\; \partial T^{kl}/\partial x^l = 0$, находим

$$\delta^i{}_l T^{kl} - \delta^k{}_l T^{il} = T^{ki} - T^{ik} = 0,$$

или

$$T^{ki} = T^{ik}, \qquad (2.1.57)$$

т. е. тензор энергии-импульса (4-напряжений) должен быть симметричен.

Заметим, что тензор T^{ik}, определенный по формуле (2.1.48), вообще говоря, не симметричен, но может быть сделан таковым заменой (2.1.53), с надлежащим образом выбранным ψ^{ikl}. В следующем пункте будет показано, что существует способ получения симметричного тензора T^{ik}.

Если производить интегрирование в выражении (2.1.52) по гиперплоскости $x^0 = \mathrm{const}$, то P^i приобретает вид [5]

$$P^i = 1/c\int T^{i0}dV, \qquad (2.1.58)$$

где интегрирование производится по всему трехмерному пространству.

Пространственные компоненты P^i образуют трехмерный вектор импульса системы, а временная компонента есть деленная на скорость света c ее энергия. Поэтому вектор с составляющими T^{10}/c, T^{20}/c, T^{30}/c можно назвать плотностью импульса, а величину [5]

$$W = T^{00} \qquad (2.1.59)$$

можно рассматривать как плотность энергии [5].

Для выяснения смысла остальных компонент T^{ik} напишем уравнения сохранения (2.1.49), отделив в них пространственные и временные производные:

$$1/c\ \partial T^{00}/\partial t + \partial T^{0\alpha}/\partial x^{\alpha} = 0; \quad 1/c\ \partial T^{\alpha 0}/\partial t + \partial T^{\alpha\beta}/\partial x^{\beta} = 0. \qquad (2.1.60)$$

Проинтегрируем эти уравнения по некоторому объему пространства V. Из первого имеем:

$$1/c\ \partial/\partial t\left(\int T^{00}dV\right) + \int \partial T^{0\alpha}/\partial x^{\alpha}\, dV = 0 \qquad (2.1.61)$$

или, преобразуя второй интеграл по (трехмерной) теореме Гаусса [5]

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00}dV = -c\oint T^{0\alpha}df_{\alpha}, \qquad (2.1.62)$$

где интеграл справа берется по поверхности, охватывающей объем V (df_x, df_y, df_z – компоненты трехмерного вектора элемента поверхности $d\mathbf{f}$).

В левой стороне равенства (2.1.62) стоит скорость изменения энергии, находящейся в объеме V. Отсюда видно, что выражение справа есть количество энергии, протекающей через границу этого объема, а вектор **S** с составляющими cT^{01}, cT^{02}, cT^{03} есть плотность этого потока энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности.

Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что требования релятивистской инвариантности, заключенные в тензорном характере величин T^{ik}, автоматически приводят к определенной связи между потоком энергии и импульсом: плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2. Из второго уравнения (2.1.60) аналогично находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{c} T^{\alpha 0} dV = -\oint T^{\alpha\beta} df_\beta \ .$$

Слева стоит изменение импульса системы в объеме V в единицу времени; поэтому $\oint T^{\alpha\beta} df_\beta$ есть количество импульса, вытекающее за единицу времени из этого объема. Таким образом, компоненты $T^{\alpha\beta}$ тензора энергии-импульса составляют трехмерный тензор плотности потока импульса. Обозначим его через $\sigma_{\alpha\beta}$.

Плотность потока энергии есть вектор; плотность же потока импульса, который сам по себе есть вектор, должна, очевидно, быть тензором. Компонента $T^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ этого тензора есть количество α-й компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x^β, что, по сути, и является определением 3-напряжений.

Выпишем все компоненты тензора энергии-импульса (или тензора 4-напряжений):

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W_{tt} & S_{tx} & S_{ty} & S_{tz} \\ S_{xt} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_{yt} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_{zt} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \qquad (2.1.63)$$

где $W_{tt} = T^{00}$ – плотность энергии;
$S_{ti} = cT^{0i}$ – компоненты вектора плотности импульса **S**;
$T^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ – компоненты тензора 3-напряжений.

В дальнейшем, учитывая специфику настоящей работы, будем называть тензор T^{ik} просто тензором 4-напряжений.