## 2.1.4. Тензор 4-напряжений в искривленном пространстве

В предыдущем параграфе было получено общее правило для вычисления компонент тензора 4-напряжений любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (2.1.46) по неискривленному 4-пространству. В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде [5]:

$$S = \frac{1}{c}\int L\sqrt{-g}\,d\Omega\,, \tag{2.1.64}$$

где $g$ – определитель метрического тензора.

В галилеевых координатах $g = -1$ и $S$ переходит в $1/c \int L\, dVdt$. Интегрирование производится по всей четырехмерной протяженности исследуемого участка одной из сторон $\lambda_{m\text{-}n}$-вакуума.

Произведем в (2.1.64) преобразование от координат $x^i$ к координатам $x^{i\prime} = x^i + \xi^i$, где $\xi^i$ – малые величины. При этом преобразовании компоненты $g^{ik}$ преобразуются согласно формулам [5]:

$$g^{ik}(x^{l\prime}) = g^{lm}(x^l)\,\partial x'^i/\partial x^l\;\partial x'^k/\partial x^m = g^{lm}\,(\delta^i_{\ l} + \partial\xi^i/\partial x^l)\,(\delta^k_{\ m} + \partial\xi^k/\partial x^m) \approx$$
$$\approx g^{ik}(x^l) + g^{im}\,\partial\xi^k/\partial x^m + g^{kl}\,\partial\xi^i/\partial x^l.$$

Метрический тензор $g'^{ik}$ является здесь функцией от $x^{l\prime}$, а тензор $g^{ik}$ – функцией прежних координат $x^l$. Для того чтобы представить все члены в виде функций от одних и тех же переменных, разложим $g^{ik\prime}(x^l+\xi^l)$ по степеням $\xi^l$. Далее, пренебрегая членами высшего порядка по $\xi^l$, мы можем в членах, содержащих $\xi^l$, написать $g^{ik}$ вместо $g^{ik\prime}$. Таким образом, находим:

$$g^{ik\prime}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \xi^l\,\partial g^{ik}/\partial x^l + g^{il}\,\partial\xi^k/\partial x^l + g^{kl}\,\partial\xi^i/\partial x^l\,.$$

Легко убедиться путем непосредственной проверки, что последние три члена справа могут быть написаны в виде суммы $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$ контравариантных производных от $\xi_i$. Таким образом, находим окончательное преобразование $g^{ik}$ в виде [5]

$$g^{ik\prime} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i}. \tag{2.1.65}$$

При этом для ковариантных компонент имеем:

$$g_{ik}' = g_{ik} + \delta g_{ik}\,, \quad \delta g_{ik} = -\,\xi_{i;k} - \xi_{k;i}\,. \tag{2.1.66}$$

(так, чтобы с точностью до величин первого порядка малости соблюдалось условие $g_{il}'g^{kl}{}' = \delta^k{}_i$) [1].

Поскольку действие $S$ есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется. С другой стороны, изменение $\delta S$ действия при преобразовании координат можно написать в следующем виде. Пусть, как и в предыдущем параграфе, $q$ обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие $S$. При преобразовании координат величины $q$ меняются на $\delta q$. При вычислении $\delta S$ можно, однако, не писать членов, связанных с изменениями $q$. Все эти члены все равно взаимно сокращаются в силу «уравнений движения» физической системы, поскольку эти уравнения как раз и получаются путем приравнивания нулю вариации $S$ по величинам $q$. Поэтому достаточно написать только члены, связанные с изменением $q_{ik}$. Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая на границах интегрирования $\delta g^{ik} = 0$, находим $\delta S$ в виде [5]

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right\}d\Omega = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}\,d\Omega.$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik} = \frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}L}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}. \tag{2.1.67}$$

Тогда $\delta S$ примет вид [2]

$$\delta S = \frac{1}{2}c\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = -\frac{1}{2}c\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

---

[1] Отметим, что уравнения $\xi^{i;k} + \xi^{k;i} = 0$ определяют те инфинитезимальные преобразования координат, которые не меняют данной метрики. В литературе их часто называют уравнениями Киллинга.

[2] В рассматриваемом случае десять величин $\delta g_{ik}$ не независимы, так как являются результатом преобразования координат, которых имеется всего четыре. Поэтому из равенства $\delta S$ нулю отнюдь не следует, что $T_{ik} = 0$.

Замечаем, что $g^{ik}\delta g_{lk} = -g_{lk}\,\delta g^{ik}$, потому $T^{ik}\delta g_{ik} = -T_{ik}\,\delta g^{ik}$. Подставляя сюда для $\delta g^{ik}$ выражение (2.1.65), имеем, воспользовавшись симметрией тензора $T_{ik}$:

$$\delta S = \frac{1}{2}c\int T_{ik}\left(\xi^{i;k} + \xi^{k;i}\right)\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{1}{2}c\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\,d\Omega .$$

Далее преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left(T_i^k\xi^i\right)_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega - \frac{1}{c}\int T_{i;k}^k\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega . \qquad (2.1.68)$$

Первый интеграл может быть написан в виде [5]

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial\left(\sqrt{-g}\,T_i^k\xi^i\right)}{\partial x^k}d\Omega \qquad (2.1.69)$$

и преобразован в интеграл по гиперповерхности. Поскольку на границах интегрирования $\xi^i$ обращается в нуль, то этот интеграл исчезает. Таким образом, приравнивая $\delta S$ нулю, находим

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int T_{i;k}^k\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega = 0 .$$

Ввиду произвольности $\xi^i$ отсюда следует, что [5]:

$$\nabla_k T_i^k = T_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(T_i^k\sqrt{-g})}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl} = 0 . \qquad (2.1.70)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2.1.49) $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$, имевшем место в галилеевых координатах, мы видим, что тензор $T_{ik}$, определяемый формулой (2.1.67), должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса (или 4-напряжений) для случая криволинейных координат, по крайней мере, с точностью до постоянного множителя.