2.1.5. Тензор 4-напряжений участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума

Пусть усредненное метрико-динамическое состояние одной из сторон деформированного участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума задается в среднем стационарной метрикой

$$ds^2 = g_{ij}dx_i\,dx_j\,, \tag{2.1.71}$$

где усредненные компоненты метрического тензора g_{ij} явно не зависят от времени.

То есть из всей совокупности сложнейших метрико-динамических метаморфоз бурлящей протяженности вакуума нас пока будет интересовать только его усредненные, не зависящие от времени проявления. Это так же, например, как вода в горном ручье сложно бурлит и клокочет, но при этом существуют и некоторое усредненная, независящая от времени составляющая течения.

Попытаемся теперь задать тензор усредненных 4-напряжений данного деформированного участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума.

Во-первых, у нас ничего нет, кроме усредненных стационарных компонент метрического тензора g_{ij} , поэтому искомый тензор усредненных 4-напряжений исследуемого участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума может зависеть только от самих этих компонентов и их производных

$$F_{ij}\,(g_{ij},\ \partial g_{ij}/\partial x_k\,,\ \partial^2 g_{ij}/\partial x_k{}^2,\ \ldots,\ \partial^m g_{ij}/\partial x_k{}^m) = F_{ij}\,. \tag{2.1.72}$$

Чем больше порядок производной m от компонентов метрического тензора $\partial^m g_{ij}/\partial x^m$ присутствует в искомом тензоре (2.1.72), тем точнее этот тензор отражает метрико-динамические свойства исследуемого деформированного участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума (см. п. 4.5 в [6]).

Во-вторых, согласно условию (2.1.57), искомый тензор 4-напряжений (2.1.72) должен быть симметричным ($F_{ij} = F_{ji}$), а его ковариантная производная, согласно (2.1.70), должна быть равна нулю

$$\nabla_i\,F_{ij} = \nabla_i\,T_{ij} = 0. \tag{2.1.73}$$

Рассмотрим упрощенный случай зависимости тензора 4-напряжений только от компонент метрического тензора, их первых и вторых производных

$$\nabla_i\,F_{ij}\,(g_{ij}\,,\ \partial g_{ij}/\partial x_k\,,\ \partial^2 g_{ij}/\partial x_k{}^2) = 0. \tag{2.1.74}$$

Давид Гильберт вариационным методом и Альберт Эйнштейн на основании тождеств Бьянки {см. (4.50) в [6]} нашли, что указанным выше требованиям удовлетворяет следующий тензор

$$F_{ij} = R_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} R, \qquad (2.1.75)$$

где

$$R = g^{ij} R_{ij} \qquad (2.1.76)$$

– скалярная кривизна,

$$R_{ij} = \partial \Gamma^{l}{}_{ik}/\partial x^{l} - \partial \Gamma^{l}{}_{il}/\partial x^{k} + \Gamma^{l}{}_{ik}\, \Gamma^{m}{}_{lm} - \Gamma^{m}{}_{il}\, \Gamma^{l}{}_{km} \qquad (2.1.77)$$

– тензор Риччи,
где, в свою очередь,

$$\Gamma^{\lambda}_{ik} = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^{i}} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^{k}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{\mu}} \right) \qquad (2.1.78)$$

– символы Кристоффеля {см. (1.8.10) в [8]}.

Позднее во время поисков решений для стационарной замкнутой Вселенной Эйнштейн обнаружил, что и

$$\nabla_i \,(R_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij}) = 0, \qquad (2.1.79)$$

т. к. ковариантная производная от самих компонент метрического тензора так же равна нулю

$$\nabla_i \, g_{ij} = 0. \qquad (2.1.80)$$

На основании тождеств (2.1.75) и (2.1.79) Эйнштейн записал два типа уравнений вида

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} R = T_{ij}\,, \qquad (2.1.81)$$

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = T_{ij}^{\,*}, \qquad (2.1.82)$$

где Λ – величина, обратно пропорциональная квадрату радиуса замкнутого пространства R_3.

Выражение (2.1.81) будем называть *внешним* уравнением Эйнштейна-Гильберта (ВУЭГ), а выражение (2.1.82) – *внутренним* уравнением Эйнштейна (ВУЭ).

Алсигна так же заметила, что в силу тождества (2.1.80) ничто не мешает записать

$$\nabla_i \,(R_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda_1 g_{ij} + \Lambda_2 g_{ij} + \ldots + \Lambda_n\, g_{ij}) = \nabla_i \, T_{ij}^{\,\prime} = 0, \qquad (2.1.82a)$$

Откуда следует уравнение

$$R_{ij} - ½g_{ij}R + \Lambda_1 g_{ij} + \Lambda_2 g_{ij} + \ldots + \Lambda_n g_{ij} = T_{ij}', \qquad (2.1.82б)$$

где Λ_n - величины обратно пропорциональные квадратам радиусов соответствующих, вложенных друг в друга замкнутых вакуумных образований: галактик, планет, организмов, биологических клеток, органелл, молекул, элементарных частиц и т.д.

Уравнения общей теории относительности А.Эйнштейна на самом деле имеют вид [5]:

$$R_{ij} - ½g_{ij}R = \chi T_{ij}, \qquad (2.1.83)$$

$$R_{ij} - ½g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = \chi T_{ij}^*, \qquad (2.1.84)$$

где $\chi = 8\pi G/c^4$ эйнштейновская гравитационная постоянная (G – ньютонова гравитационная постоянная), которая, по сути, является коэффициентом пропорциональности, связывающим метрические величины R_{ij} с динамическими T_{ij}.

В общей теории относительности (ОТО) величину $\Lambda \sim 1/R_v^2$ (где R_v – радиус Вселенной) принято называть космологической постоянной.

В рамках ОТО часто полагают, что $\Lambda = 0$. Это, по сути, означает, что в таких космологических моделях условно считается, что радиус Вселенной $R_в$ столь велик по отношению к исследуемым объемам пространства, что его можно считать бесконечно большим ($R_в \sim \infty$).

В Алсигне нет необходимости в коэффициенте пропорциональности χ, т. к. в геометризированной вакуумной теории все физические величины (кроме скорости света) обладают размерностью некоторой степени от расстояния (см. п. 1.7.8 в [8]).

Уравнения Алсигны (2.1.81) и (2.1.82) имеют принципиально иную интерпретацию в отличие от уравнений ОТО (2.1.83) и (2.1.84).

В уравнениях ОТО (2.1.83) и (2.1.84) в правой части записывается тензор энергии-импульса, характеризующий состояние плотной материи, которая является причиной искривления окружающего пространства, описываемого их левой частью.

Левые части уравнений Алсигны (2.1.81) и (2.1.82) по форме совпадают с левыми частями уравнений ОТО (2.1.83) и (2.1.84), но имеют совершенно иную физическую интерпретацию.

Уравнения (2.1.81) и (2.1.82) говорят о том, что если локальная область протяженности $\lambda_{m\div n}$-вакуума 4-искривленна и описывается компонентами метрического тензора g_{ij}, то в этой же области высвеченной лучами света «пустоты», возникают 4-напряжения T_{ij} или T_{ij}^*, которые, *согласно представлениям третьего приближения теории «упругого» вакуума (2.1.63) и (2.1.75), описываются тензорами вида:*

$$R_{ij} - ½g_{ij}R = T_{ij} \equiv \begin{pmatrix} W_{tt} & S_{tx} & S_{ty} & S_{tz} \\ S_{xt} & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_{yt} & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_{zt} & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.1.85}$$

- для внешнего открытого пространства, или

$$R_{ij} - ½g_{ij}R + \Lambda g_{ij} = T_{ij}^* \equiv \begin{pmatrix} W_{tt}^* & S_{tx}^* & S_{ty}^* & S_{tz}^* \\ S_{xt}^* & \sigma_{xx}^* & \sigma_{xy}^* & \sigma_{xz}^* \\ S_{yt}^* & \sigma_{yx}^* & \sigma_{yy}^* & \sigma_{yz}^* \\ S_{zt}^* & \sigma_{zx}^* & \sigma_{zy}^* & \sigma_{zz}^* \end{pmatrix} \tag{2.1.86}$$

- для внутреннего замкнутого пространства.

Здесь компоненты тензоров T_{ij} и T_{ij}^* с точностью до смысла, определенного в п. 2.1.3, описывают аналоги плотности энергии, плотности импульса и 3-напряжений исследуемого объема $\lambda_{m\div n}$-вакуума, записанные в такой системе единиц, в которой их размерность является некоторой степенью от расстояния.

Уравнение (2.1.81) можно представить в несколько ином виде, для этого умножим его слева на g^{ij}

$$g^{ij}R_{ij} - ½\, g^{ij}g_{ij}\, R = g^{ij}\, T_{ij}\,. \tag{2.1.87}$$

В силу того, что

$$g^{ij}R_{ij} = R, \qquad g^{ij}g_{ij} = \delta_j^{\ i}, \qquad g^{ij}T_{ij} = T \tag{2.1.88}$$

вместо (2.1.87) имеем [5]

$$R = -\,T\,.$$

Подставляя это выражение в (2.1.81), получим уравнение [5]

$$R_{ij} = T_{ij} - ½g_{ij}T\,. \tag{2.1.89}$$

Проделывая те же действия с выражением (2.1.82), получим

$$R_{ij} = T_{ij}^{\ *} - ½g_{ij}T^{\ *} + 2\Lambda g_{ij}\,. \tag{2.1.90}$$

Уравнения (2.1.89) и (2.1.90) носят упрощенный характер не только из-за того, что они содержат лишь первые и вторые производные от компонент метрического тензора g_{ij}, но и еще по одному важному аспекту. Еще Бернард Риман в своем классическом мемуаре «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» указал, что функция пространственного мероопределения между двумя близлежащими точками $I\,(x,\, x + dx)$ не обязана носить квадратичный характер. Чтобы пояснить данное высказывание, разложим функцию мероопределения в бесконечный ряд по разностям координат [19]

$$I\,(x, x + dx) = i\,(x, x) + a_\mu(x)\,dx^\mu + g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + w_{\mu\nu\sigma}(x)dx^\mu dx^\nu dx^\sigma + \ldots,$$

Свойство симметрии функции мерообразования по отношению к перестановке ее аргументов

$$I\,(x, x + dx) = I\,(x + dx, x)$$

требует исключения из нее всех нечетных членов [19], при этом имеем

$$I\,(x, x + dx) = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + h_{\mu\nu\sigma\vartheta}(x)dx^\mu dx^\nu dx^\sigma dx^\vartheta + \ldots,$$

Риманова геометрия строится только на основании первого члена данного разложения

$$I\,(x, x + dx) = ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu,$$

а оптимизация кривизны, описываемой им поверхности, приводит в итоге к уравнениям вида (2.1.89) и (2.1.90). Поэтому постоянно необходимо помнить, что уравнения (2.1.89) и (2.1.90) обладают статусом лишь некоторого модельного приближения, со своими границами применимости.