2.2.5. Точные решения сбалансированных уравнений

Точные решения СВУЭГ (2.2.5) и СВУЭ (2.2.6) универсальны, они пригодны для описания стабильных вакуумных образований в любом из $\lambda_{m\div n}$-вакуумов. Приведем эти решения, придерживаясь в основном [4] и [19].

2.2.5.1. Обобщенные метрики Шварцшильда

Начнем с решений СВУЭГ (2.2.5)

$$R_{ij} = 0. \tag{2.2.7}$$

Предположим, что искомый объект, удовлетворяющий условию (2.2.7), является сферически симметричным $\lambda_{m\div n}$-вакуумным образованием островного типа. При этом удобно перейти в сферическую систему координат $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct,\ r,\ \theta,\ \varphi)$ и записать искомые метрики в следующем виде [4, 6]:

$$ds^{(-)2} = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \text{ с сигнатурой } (+\,-\,-\,-), \tag{2.2.8}$$

$$ds^{(+)2} = -e^{\nu}c^2dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) \text{ с сигнатурой } (-\,+\,+\,+), \tag{2.2.9}$$

где ν и λ – некоторые функции от времени t и расстояния r.

Рассмотрим сначала метрику (2.2.8). В этом случае отличные от нуля компоненты метрического тензора равны:

$$g_{00} = e^{\nu}, \qquad g_{11} = -\,e^{\lambda}, \qquad g_{22} = -\,r^2, \qquad g_{33} = -\,r^2\sin^2\theta, \tag{2.2.10}$$

а контравариантные им компоненты равны [4]

$$g^{00} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -\,e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -\,r^{-2}, \quad g^{33} = -\,r^{-2}\sin^{-2}\theta. \tag{2.2.11}$$

Подставляя компоненты метрических тензоров (2.2.10) и (2.2.11) в формулу (2.1.78), вычислим символы Кристоффеля [4]:

$$\begin{array}{llll} \Gamma_{11}{}^{1} = \tfrac{1}{2}\,\lambda', & \Gamma_{10}{}^{0} = \tfrac{1}{2}\,\nu', & \Gamma_{33}{}^{2} = -\sin\theta\cos\theta, & \\ \Gamma_{11}{}^{0} = \tfrac{1}{2}\,\lambda^{\bullet}\, e^{\lambda-\nu}, & \Gamma_{22}{}^{1} = -r\,e^{-\lambda}, & \Gamma_{00}{}^{1} = \tfrac{1}{2}\,\nu' e^{\nu-\lambda}, & (2.2.12) \\ \Gamma_{12}{}^{2} = \Gamma^{3}{}_{13} = 1/r, & \Gamma_{23}{}^{3} = ctg\ \theta, & \Gamma_{00}{}^{0} = \tfrac{1}{2}\,\nu^{\bullet}, & \\ \Gamma_{10}{}^{1} = \tfrac{1}{2}\,\lambda^{\bullet}, & \Gamma_{33}{}^{1} = -r\sin^{2}\theta\, e^{-\lambda}. & & \end{array}$$

(штрих означает дифференцирование по r, а точка над буквой – дифференцирование по ct).

Остальные символы Кристоффеля $\Gamma_{kl}{}^{i}$ (кроме тех, которые отличаются перестановкой индексов k и l) равны нулю. Подставляя (2.2.12) в (2.1.77) с учетом (2.2.7) получим следующую систему дифференциальных уравнений [4]:

$$R_1{}^1 = -\,e^{-\lambda}\,(\nu'/r + 1/r^{2}) + 1/r^{2} = 0,$$

$$R_2{}^2 = R_3{}^3 = -\tfrac{1}{2}\,e^{-\lambda}\,[\nu'' + \nu'^{2}/2 + (\nu' - \lambda')/r - \nu'\lambda'/2] +$$

$$+\ \tfrac{1}{2}\,e^{-\nu}(\lambda^{\bullet\bullet} + \tfrac{1}{2}\,\lambda^{\bullet\,2} - \lambda^{\bullet}\nu^{\bullet}/2) = 0, \qquad (2.2.13)$$

$$R_0{}^0 = -\,e^{-\lambda}\,(1/r^{2} - \lambda'/r) + 1/r^{2} = 0,$$

$$R_0{}^1 = -\,e^{-\lambda}\,\lambda^{\bullet}/r = 0.$$

Остальные $R_i{}^j$ тождественно равны нулю.

Для в среднем стационарного (т. е. не зависящего от времени) состояния локального вакуумного образования все производные по времени от компонент метрического тензора равны нулю. Поэтому для стационарного случая вместо системы уравнений (2.2.13) имеем:

$$R_1{}^1 = -\,e^{-\lambda}\,(\nu'/r + 1/r^{2}) + 1/r^{2} = 0, \qquad (2.2.14)$$

$$R_2{}^2 = R_3{}^3 = -\tfrac{1}{2}\,e^{-\lambda}\,[\nu'' + \nu'^{2}/2 + (\nu' - \lambda')/r - \nu'\lambda'/2] = 0, \qquad (2.2.15)$$

$$R_0{}^0 = -\,e^{-\lambda}\,(1/r^{2} - \lambda'/r) + 1/r^{2} = 0. \qquad (2.2.16)$$

Вычитая (2.2.14) из (2.2.16), получим

$$\nu + \lambda = 0, \quad \text{или} \quad \nu = -\lambda.$$

При этом из (2.2.14) – (2.2.16) следует [4]:

$$-e^{\nu}(\nu'/r + 1/r^2) + 1/r^2 = 0, \qquad (2.2.17)$$

$$\nu'' + \nu'^2 + 2\nu'/r = 0. \qquad (2.2.18)$$

Уравнение (2.2.17) имеет три решения:

$$\nu_1 = \ln(c_1 + c_2/r), \qquad (2.2.19)$$

$$\nu_2 = \ln(c_1 - c_2/r), \qquad (2.2.20)$$

$$\nu_3 = c_3, \qquad (2.2.21)$$

где c_1, c_2, c_3 – константы интегрирования. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой каждого из решений (2.2.19) – (2.2.21) в дифференциальное уравнение (2.2.17).

В свою очередь, уравнение (2.2.18) так же имеет три решения:

$$\nu_1 = \ln(1 + b/r), \qquad (2.2.22)$$

$$\nu_2 = \ln(1 - b/r), \qquad (2.2.23)$$

$$\nu_3 = 0, \qquad (2.2.24)$$

где b – константа интегрирования.

Произошло маленькое математическое чудо: два уравнения (2.2.17) и (2.2.18) при $c_1 = 1$, $c_2 = b$ и $c_3 = 0$ имеют по три одинаковых решения

$$\nu_1 = \ln(1 + b/r), \qquad (2.2.25)$$

$$\nu_2 = \ln(1 - b/r), \qquad (2.2.26)$$

$$\nu_3 = 0. \qquad (2.2.27)$$

Это как раз то, что приводит в восторг и заставляет восхищаться математикой как произведением искусств.

Подставляя теперь три решения (2.2.25) – (2.2.27) в (2.2.8) с учетом условия $\nu = -\lambda$, получим три метрики с одинаковой сигнатурой (+ – – –):

$$ds_1^{(-)2} = (1 - b/r)c^2dt^2 - (1 - b/r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2, \qquad (2.2.28)$$

$$ds_2^{(-)2} = (1 + b/r)c^2dt^2 - (1 + b/r)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2, \qquad (2.2.29)$$

$$ds_3^{(-)2} = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2. \qquad (2.2.30)$$

где b – радиус замкнутого шарообразного объема, который наблюдатель может рассмотреть только с его внешней стороны.

Вакуумное уравнение Эйнштейна (2.2.7) всесторонне изучено. Оно имеет бесконечное количество решений, зависящих от выбора системы отсчета. Эти решения рассортированы на неприводимые друг в друга группы. Выражения (2.2.25) – (2.2.27), подставляемые в метрики (2.2.28) – (2.2.30), как раз и принадлежат различным группам решений СВУЭГ (2.2.7). Поэтому метрики (2.2.28) – (2.2.30) никаким преобразованием координат не могут быть преобразованы друг в друга.

Чудеса на этом не закончились. Если воспользоваться метрикой (2.2.9) с ковариантными и контравариантными компонентами метрического тензора:

$$g_{00} = -e^{\nu}, \quad g_{11} = e^{\lambda}, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2\sin^2\theta. \qquad (2.2.31)$$

$$g^{00} = -e^{-\nu}, \quad g^{11} = e^{-\lambda}, \quad g^{22} = r^{-2}, \quad g^{33} = r^{-2}\sin^{-2}\theta, \qquad (2.2.32)$$

то полностью аналогичный путь решения СВУЭГ (2.2.7) приводит еще к трем метрикам с одинаковой сигнатурой (– + + +):

$$ds_1^{(+)2} = -(1 - b/r)c^2dt^2 + (1 - b/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (2.2.33)$$

$$ds_2^{(+)2} = -(1 + b/r)c^2dt^2 + (1 + b/r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (2.2.34)$$

$$ds_3^{(+)2} = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (2.2.35)$$

В ОТО под метрикой Шварцшильда обычно подразумевается только метрика (2.2.28). В рамках Алсигны все четыре метрики (2.2.28), (2.2.29), (2.2.33) и (2.2.34) будем называть обобщенными метриками Шварцшильда.

2.2.5.2. Обобщенные метрики де Ситтера

Результатом решения СВУЭ (2.2.6)

$$R_{ij} - 2\Lambda g_{ij} = 0 \tag{2.2.36}$$

являются три метрики с сигнатурой (+ – – –):

$$ds_1^{(-)2} = (1 - r^2/R^2)c^2dt^2 - (1 - r^2/R^2)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2, \tag{2.2.37}$$

$$ds_2^{(-)2} = (1 + r^2/R^2)c^2dt^2 - (1 + r^2/R^2)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2, \tag{2.2.38}$$

$$ds_3^{(-)2} = c^2dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{2.2.39}$$

где

$$R = \sqrt{\frac{3}{2\Lambda}} \tag{2.2.40}$$

– радиус замкнутого шарообразного объема с точки зрения внутреннего наблюдателя. Другими словами, R – это радиус шара, который наблюдатель видит вокруг себя, находясь внутри него.

Уравнению (2.2.36) удовлетворяют компоненты еще трех метрик с противоположной сигнатурой (– + + +):

$$ds_1^{(+)2} = -(1 - r^2/R^2)c^2dt^2 + (1 - r^2/R^2)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{2.2.41}$$

$$ds_2^{(+)2} = -(1 + r^2/R^2)c^2dt^2 + (1 + r^2/R^2)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{2.2.42}$$

$$ds_3^{(+)2} = -c^2dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{2.2.43}$$

В том, что компоненты метрик (2.2.37) – (2.2.39) и (2.2.41) – (2.2.43) являются результатом решения уравнения (2.2.36), можно убедиться с помощью непосредственной подстановки соответствующих компонент метрических тензоров в данное уравнение.

В ОТО квадратичную форму вида (2.2.37) принято называть метрикой де Ситтера. Метрики (2.2.39) и (2.2.43) полностью совпадают соответственно с метриками (2.2.30) и (2.2.35) и описывают неискаженные пространство Минковского с сигнатурой (+ – – –) и антипространство Минковского с сигнатурой (– + + +) в сферической системе отсчета.

В Алсигне важны все метрики (2.2.37), (2.2.38), (2.2.41), (2.2.42), которые будем называть обобщенными метриками де Ситтера.

Переход к пяти новым координатам [19]:

$$y_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad y_1 = r\cos\theta,$$
$$y_4 + y_0 = R\,e^{\frac{ct}{R}}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}, \qquad y_4 - y_0 = R\,e^{-\frac{ct}{R}}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} \tag{2.2.44}$$

позволяет записать, например, метрику (2.2.37) в виде [19]

$$ds_1^{(+)2} = dy_0^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2 - dy_4^2, \tag{2.2.45}$$

где на пять переменных наложено соотношение связи [19]

$$y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 = R^2. \tag{2.2.46}$$

Это соотношение определяет пространство-время замкнутого мира де Ситтера, как 4-мерную гиперповерхность в 5-мерном пространстве.

Выражение (2.2.46) можно представить в виде

$$1 - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - y_0^2)/R^2 = 0\,, \tag{2.2.47}$$

сходном с нулевой компонентой метрики (2.2.37)

$$g_{00} = (1 - r^2/R^2).$$

Другое преобразование координат, предложенное Леметром и Робертсоном [19],

$$r' = \frac{r}{\sqrt{1-\dfrac{r^2}{R^2}}} R\, e^{-\frac{ct}{R}}, \qquad ct' = ct + R\ln\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}} \tag{2.2.48}$$

приводит метрики (2.2.37) и (2.2.41) к виду

$$ds_1^{(-)2} = c^2dt^2 - e^{-\frac{2ct}{R}}\,[dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{2.2.49}$$

$$ds_1^{(+)2} = -\,c^2dt^2 + e^{\frac{2ct}{R}}\,[dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{2.2.50}$$

а преобразование координат вида

$$r' = \frac{r}{\sqrt{1+\dfrac{r^2}{R^2}}} R\, e^{\frac{ct}{R}}, \qquad ct' = ct + R\ln\sqrt{1+\frac{r^2}{R^2}} \tag{2.2.51}$$

позволяют записать метрики (2.2.38) и (2.2.42) в виде

$$ds_2^{(+)2} = c^2dt'^2 - e^{-\frac{2ct}{R}}\,[dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{2.2.52}$$

$$ds_2^{(-)2} = -\,c^2dt'^2 + e^{\frac{2ct}{R}}\,[dr'^2 + r'^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)]. \tag{2.2.53}$$

Такой вид совокупности обобщенных метрик де Ситтера передает периодический характер описываемых ими вакуумных процессов, т. к.

$$\frac{e^{\frac{2ct}{R}} + e^{-\frac{2ct}{R}}}{2} = ch\left(\frac{2ct}{R}\right) \quad \text{с периодом } 2\pi i. \tag{2.2.54}$$

2.2.5.3. Обобщенные метрики Коттлера

Другой вариант решений СВУЭ (2.2.6)

$$R_{ij} - 2\Lambda g_{ij} = 0 \qquad (2.2.55)$$

приводит к следующим метрикам с сигнатурой (+ – – –)

$$ds_1^{(-)2} = \left(1 - \frac{b}{r} + \frac{r^2}{R^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{b}{r} + \frac{r^2}{R^2}\right)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (2.2.56)$$

$$ds_2^{(-)2} = \left(1 + \frac{b}{r} - \frac{r^2}{R^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{b}{r} - \frac{r^2}{R^2}\right)} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (2.2.57)$$

$$ds_3^{(-)2} = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (2.2.58)$$

и к аналогичным метрикам с противоположной сигнатурой (– + + +)

$$ds_1^{(+)2} = -\left(1 - \frac{b}{r} + \frac{r^2}{R^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{b}{r} + \frac{r^2}{R^2}\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (2.2.59)$$

$$ds_2^{(+)2} = -\left(1 + \frac{b}{r} - \frac{r^2}{R^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{b}{r} - \frac{r^2}{R^2}\right)} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (2.2.60)$$

$$ds_3^{(+)2} = -\, c^2 dt^2 + dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right). \qquad (2.2.61)$$

Метрики (2.2.56), (2.2.57) и (2.2.59), (2.2.60) будем называть обобщенными метриками Коттлера.

При $b << r$ обобщенные метрики Коттлера (2.2.56) – (2.2.60) превращаются в обобщенные метрики де Ситтера (2.2.37) – (2.2.43), а при $R >> r$ – в обобщенные метрики Шварцшильда (2.2.28) – (2.2.30), (2.2.33) – (2.2.35).