2.8.4. Определение плотности распределения вероятности производной *n*-го порядка *n* раз дифференцируемого случайного стационарного процесса

Перед выводом уравнения Шредингера приведем две «технические» статьи, без которых вывод этого уравнения был бы невозможен. Первая статья посвящена определению плотности распределения вероятности производной *n*-го порядка *n* раз дифференцируемого случайного стационарного процесса и является разработкой автора настоящего исследования [37]. Вторая статья «Преобразование Фурье» позаимствована в [38].

На первый взгляд, материал этих двух статей кажется выпадающим из общего контекста настоящего исследования, но на самом деле изучение затронутых в них проблем является ключом к пониманию квантовой механики и к определению границ ее применимости. Решение данной проблемы подводит логическое обоснование под квантово-механическую процедуру перехода от координатного представления к импульсному и наоборот. Это оказывается возможным в силу того, что импульс частицы с массой m прямо пропорционален производной от ее координаты $p_x = m\partial x/\partial t$.

Именно это обстоятельство позволяет обосновать связь между импульсным и координатным представлениями волновой функции квантовой системы, исходя не из феноменологических принципов корпускулярно-волнового дуализма, а из закономерностей статистической физики.

Для примера рассмотрим *м* реализаций случайного стационарного процесса $\xi(t)$ (рис. 2.8.3). Откуда видно, что значение случайной величины $\xi(t_i)$ в сечении t_i и значение производной этого процесса $\xi'(t_i) = \partial\xi(t_1)/\partial t_1$ при том же значении аргумента t_i являются некоррелированными, случайными величинами. Данное утверждение может быть выражено аналитически [39]

$$<\xi(t_i)\xi(t_i)>=<\frac{d}{dt}\frac{1}{2}[\xi(t_i)]^2>=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}<[\xi(t_i)]^2>=0, \qquad (2.8.8)$$

где <·> означает усреднение по реализациям. Здесь учтено, что все усредненные характеристики стационарного в узком смысле случайного процесса являются постоянными величинами, в том числе дисперсия

$$<[\xi(t_i)]^2>=const\,. \qquad (2.8.9)$$

В (2.8.8) также учтено, что операции дифференцирования и усреднения в данном случае коммутируют.

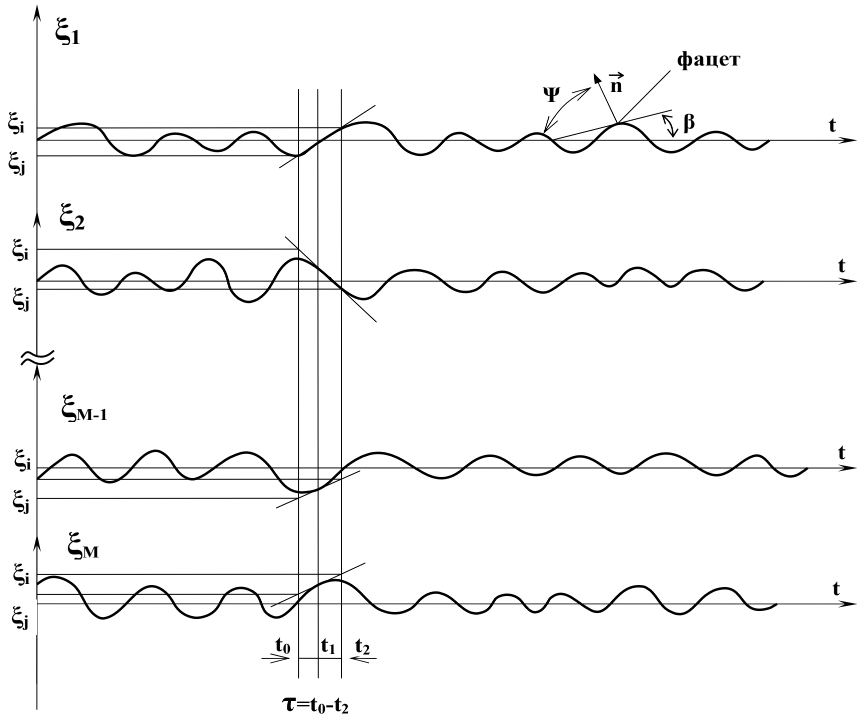

Рис. 2.8.3. Реализации случайного стационарного процесса

Существует также класс случайных процессов, в которых $\xi_i\,(t_i)$ и $\xi_i{}'(t_i)$ являются не только некоррелированными, но и независимыми случайными величинами. К таким процессам относится важнейший для приложений случайный стационарный гауссовский процесс [39, 40].

Однако даже при статистической независимости случайных величин ξ_i и ξ'_i некая связь между ПРВ $\rho_1(\xi_i)$ и ПРВ $\rho_1(\xi_i{}')$ существует. Это вытекает хотя бы из хорошо известной процедуры получения ПРВ производной $\rho_1(\xi'_i)$ при известной двухмерной ПРВ исходного процесса [39, 40]

$$\rho_2\left(\xi_i, \xi_j\right) = \rho_2\left(\xi_i, t_i; \xi_i, t_j\right). \tag{2.8.10}$$

Для этого в выражении (2.8.10) необходимо сделать замену переменных

$$\xi_i = \xi_k - \frac{\tau}{2}\xi'_k, \quad \xi_j = \xi_k + \frac{\tau}{2}\xi'_k, \quad t_i = t_k - \frac{\tau}{2}, \quad t_j = t_k - \frac{\tau}{2},$$

где

$$\tau = t_j - t_i, \quad t_k = \frac{t_j - t_i}{2},$$

с якобианом преобразования $[J] = \tau$.

В результате из ПРВ (2.8.10) получим

$$\rho_2(\xi_k, \xi'_k) = \lim_{\tau\to 0} \tau\, \rho_2\left(\xi_k - \frac{\tau}{2}\xi',\ t_k - \frac{\tau}{2};\ \xi_k + \frac{\tau}{2}\xi',\ t_k + \frac{\tau}{2}\right). \quad (2.8.11)$$

Далее, интегрируя полученное выражение по ξ_k, найдем искомую ПРВ производной исходного процесса в сечении t_k:

$$\rho_1(\xi'_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_2(\xi_k, \xi'_k)\, d\xi_k\,. \quad (2.8.12)$$

Формальная процедура (2.8.10) – (2.8.12) позволяет решить задачу определения ПРВ $\rho_1(\xi')$ при известной двухмерной ПРВ (2.8.10). Однако двухмерные ПРВ определены для очень ограниченного класса случайных процессов. Поэтому необходимо рассмотреть возможность получения одномерной ПРВ $\rho_1(\xi_i')$ при известной одномерной ПРВ $\rho_1(\xi_i)$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующими свойствами случайных процессов [39, 40]:

1. Двухмерная ПРВ любого случайного процесса может быть представлена в виде

$$\rho_2(\xi_i, t_i; \xi_j, t_j) = \rho_1(\xi_i, t_i)\rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i), \quad (2.8.13)$$

где $\rho(\xi_j, t_j/\xi_i, t_i)$ – условная ПРВ.

2. Для стационарного, в узком смысле случайного процесса, справедливо тождество [39, 40]

$$\rho_1(\xi_i, t_i) = \rho_1(\xi_j, t_j). \quad (2.8.14)$$

3. Условная ПРВ случайного стационарного процесса при $t_i \to t_j$ вырождается в дельта-функцию [40]

$$\lim_{\tau\to 0}\rho_2\left(\xi_i, t_i / \xi_j, t_j\right) = \delta\left(\xi_i - \xi_j\right). \qquad (2.8.15)$$

На основании вышеперечисленных свойств изучаемого стационарного случайного процесса попытаемся препарировать этот процесс на участке $]t_i - \tau_0;\, t_i + \tau[$ при $\tau \to 0$ посредством следующей формальной процедуры.

ПРВ $\rho_1(\xi_i) = \rho_1(\xi_i,\, t_i)$ и $\rho_1(\xi_j) = \rho_1(\xi_j,\, t_j)$ всегда можно представить в виде произведения двух функций

$$\rho(\xi_i) = \varphi(\xi_i)\varphi(\xi_i) = \varphi^2(\xi_i) \quad и \quad \rho(\xi_j) = \varphi(\xi_j)\varphi(\xi_j) = \varphi^2(\xi_j), \qquad (2.8.16)$$

где $\varphi(\xi_i)$ – плотность амплитуды вероятности (ПАВ) случайной величины ξ_i в сечении t_i.

Для стационарного случайного процесса справедливо тождество

$$\varphi(\xi_i) = \varphi(\xi_j), \qquad (2.8.18)$$

в чем легко убедиться, взяв квадратный корень от обеих частей тождества (2.8.14). Отметим, что тождество (2.8.18) приближенно справедливо и для большинства нестационарных случайных процессов при $\tau \to 0$, т. е.

$$\varphi(\xi_i, t_i) = \lim_{\tau\to 0}\varphi(\xi_j,\, t_j = t_i - \tau). \qquad (2.8.18)$$

При выполнении условия (2.8.18) выражение (2.8.13) может быть представлено в симметричном виде

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \varphi(\xi_i)\rho(\xi_j / \xi_i)\,\varphi(\xi_j), \qquad (2.8.19)$$

где $\rho(\xi_j / \xi_i)$ – условная ПРВ, или в развернутом виде

$$\rho\left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right] =$$

$$= \varphi\left[\xi_i, t_j = t_k - \frac{\tau}{2}\right]\rho\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2} \;/\; \xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}\right]\varphi\left[\xi_i, t_i = t_k + \frac{\tau}{2}\right]. \qquad (2.8.20)$$

В (2.8.20) устремим τ к нулю, но таким образом, чтобы отрезок τ равномерно слева и справа стягивался в точку $t_k = (t_j - t_i)/2$. Обозначим симметричное стягивание τ к нулю через $\tau \to \pm\, 0$, тогда с учетом (2.8.15) из (2.8.19) получим

$$\lim_{\tau\to\pm 0}\rho(\xi_i,\xi_j)=\lim_{\tau\to\pm 0}\left\{\varphi(\xi_i)\rho(\xi_j/\xi_i)\varphi(\xi_j)\right\}=\varphi(\xi_{ik})\delta(\xi_{ik}-\xi_{ik})\varphi(\xi_{jk}), \quad (2.8.21)$$

где ξ_{ik} – результат стремления случайной величины $\xi(t_i)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ слева (т. е. $\xi_i \to \xi_k^- = \xi_{ik}$ – предел слева при $t_i \to t_k^-$);

ξ_{jk} – результат стремления случайной величины $\xi(t_j)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ справа (т. е. $\xi_j \to \xi_k^+ = \xi_{jk}$ – предел справа при $t_j \to t_k^+$).

Проинтегрировав обе части выражения (2.8.21) по ξ_{ik} и ξ_{jk}, получим тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi_{ik})\delta(\xi_{jk}-\xi_{ik})\varphi(\xi_{jk})d\xi_{ik}d\xi_{jk}=1. \quad (2.8.22)$$

Выражение (2.8.21) является формальным математическим тождеством из теории обобщенных функций, учитывающим свойства δ-функции и свойства плотности распределения вероятности $\rho(\xi_i)=\varphi(\xi_i)\varphi(\xi_i)$.

Для того, чтобы наполнить выражение (2.8.21) физическим содержанием, необходимо задать конкретный вид δ-функции.

Определим вид δ-функции для марковского случайного процесса. Хотя марковские случайные процессы (т. е. процессы без вероятностного последствия) представляют собой специальный класс случайных процессов, значение их очень велико, поскольку выделяющие их условия оказываются выполненными для широкой области приложений. Это тем более справедливо, что случайные процессы общего вида во многих случаях могут быть приведены к схеме процесса без последствия, если воспользоваться более детальным описанием рассматриваемого процесса, т. е. должным образом увеличить количество переменных, описывающих состояние рассматриваемой системы.

Для пояснения данного утверждения обратимся к случаю детерминированного процесса. Допустим, что динамическая система описывается дифференциальным уравнением не первого порядка, а второго. Тогда решение при начальных условиях

$$x=x_0,\ \dot{x}=u_0 \quad \text{при} \quad t=t_0 \quad (2.8.23)$$

будет

$$x=f(t,x_0,u_0,t_0). \quad (2.8.24)$$

Если и теперь понимать под состоянием системы только координату x, то для плотности условной вероятности значения x в момент t надо было написать

$$v(t,x/t_0,x_0,u_0)=\delta[x-f(t,x_0,u_0,t_0)]. \quad (2.8.25)$$

Задание u_0 равносильно заданию двух значений x в весьма близкие моменты времени (скажем, x_0 при $t = t_0$ и $x_0 - h$ при $t = t_0 - \tau$ так, что $u_0 = \lim\limits_{\tau \to 0} (t / \tau)$ *).* Таким образом, условная вероятность, по существу, зависит от предшествующих состояний: $v\ (t,\ x / t_0,\ x_0,\ u_0) \approx v\ (t,\ x / t_0,\ x_0;\ t_0 - \tau,\ x_0 - h),$ и, следовательно, статистическое обобщение (2.8.25) не является процессом марковского типа.

Не только в статистической, но и в динамической теории обычно предпочитают избегать зависимости состояния системы от ее поведения до фиксированного начального момента. Это достигается расширением самого понятия состояния в момент t путем введения новых характеризующих состояние величин. В приведенном примере применение этого приема сводится к тому, что наряду с координатой x вводится еще и скорость $\dot{x} = u$.

Понимая под состоянием совместное задание x и u в момент t , можно записать условную вероятность этого состояния для рассматриваемого динамического процесса в виде

$$\delta[x - f(t, x_0, u_0, t_0)]\delta[u - f(t, x_0, u_0, t_0)], \qquad (2.8.26)$$

что представляет собой частный случай вероятности перехода $v\ (t,\ x,\ u / t_0,\ x_0,\ u_0)$. Таким образом, в соответствующей статистической схеме мы приходим теперь к марковскому процессу, но для совокупности двух случайных функций x и u , т. е. для двумерной *ПРВ* $\rho_2(x,\ u)$.

Аналогичным образом k-мерный случайный процесс, не являющийся марковским, можно путем введения достаточно обширной совокупности «координат» сделать марковским, но для большего числа измерений k'. Для этого достаточно понимать под «состоянием» системы совокупность значения рассматриваемого процесса в последний наблюдаемый момент времени t и некоторого количества значений из «предыстории» этого процесса $t' < t$.

Итак, рассмотрим непрерывный марковский процесс, для которого справедливо уравнение Эйнштейна – Фоккера [39, 40, 41]

$$\frac{\partial \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial t} = B \frac{\partial^2 \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial \xi^2}, \qquad (2.8.27)$$

где B – коэффициент диффузии.

Это дифференциальное уравнение параболического типа имеет три решения, одно из которых может быть представлено в виде

$$\rho_2\left(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i\right) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\{ip(\xi_j - \xi_i) - p^2 B(t_j - t_i)\} dp, \qquad (2.8.28)$$

где p – обобщенный параметр (обобщенная частота). При $\tau \to \pm 0$ из (2.8.28) получим одно из определений δ-функции

$$\lim_{\tau\to\pm 0} \rho(\xi_i / \xi_j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ip(\xi_{jk} - \xi_{ik})\}dp = \delta(\xi_j - \xi_i), \qquad (2.8.29)$$

которое на исследуемом интервале $\tau \to 0$ характерно для весьма широкого класса непрерывных процессов.

Подставив полученную таким образом δ - функцию (2.8.29) в выражение (2.8.22), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik})\,\varphi(\xi_{jk})\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ip(\xi_{jk} - \xi_{ik})\}dp\; d\xi_{ik}\, d\xi_{jk} = 1. \qquad (2.8.30)$$

Поменяв в (2.8.30) порядок интегрирования, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik})\exp\{-ip\xi_{ik}\}d\xi_{ik}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{jk})\exp\{ip\xi_{jk})d\xi_{jk}\right]dp = 1. \qquad (2.8.31)$$

Учтем, что, согласно (2.8.18), $\varphi(\xi_{ik}) = \varphi(\xi_{jk})$ и что хотя бы у один раз дифференцируемого случайного процесса, согласно (2.8.22), $\xi_{ik} = \xi_{jk}$. При этом выражение (2.8.31) может быть представлено в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p)\varphi^*(p)dp = 1, \qquad (2.8.32)$$

где

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k)\exp\{-ip\xi_k\}d\xi_k, \qquad (2.8.33)$$

$$\varphi^*(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k)\exp\{ip\xi_k\}d\xi_k. \qquad (2.8.34)$$

Подынтегральное выражение (2.8.32) отвечает всем требованиям ПРВ $\rho(p)$ случайной величины p:

$$\rho(p) = \varphi(p)\varphi^*(p) = \left|\varphi(p)\right|^2 . \tag{2.8.35}$$

Выясним теперь, что представляет из себя случайная величина p. Для этого вернемся к рассмотрению выражения (2.8.28). Результат интегрирования в правой части этого выражения от величины p не зависит. Поэтому ее можно рассматривать как некую обобщенную частоту или обобщенное волновое число. Однако физическая постановка задачи и формализм математической записи уравнения (2.8.28) накладывают на величину p следующие ограничения:

1) величина p должна характеризовать случайный процесс в исследуемом интервале $]t_i - \tau_0;\, t_i + \tau[$ при $\tau \to 0$;

2) Величина p, согласно математической записи правой части выражения (2.8.29), должна принадлежать множеству действительных чисел ($p \in R'$), имеющему мощность континуума, т. е. p должна иметь возможность принимать любое значение из диапазона $]-\infty, \infty[$;

3) p должна быть случайной величиной.

Всем трем требованиям удовлетворяет любая из следующих случайных величин, связанных со случайным процессом на исследуемом интервале:

$$\xi_i' = \frac{\partial \xi_k}{\partial t},\ \ \xi_i'' = \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t},\ \ \ldots\ ,\ \ \xi^{(n)}{}_i = \frac{\partial^n \xi_i}{\partial t^n}. \tag{2.8.36}$$

Однако эти случайные величины характеризуют процесс на исследуемом интервале времени τ не в равной степени.

Рассмотрим одну из реализаций исследуемого случайного процесса. Функция $\xi(t)$ (рис. 2.8.3) в интервале $[t_i;\ t_j = t_i + 2\tau]$ при $\tau < \tau_{\text{кор}}$ (где $\tau_{\text{кор}}$ – радиус корреляции случайного процесса на исследуемом участке) может быть разложена в ряд Тейлора – Маклорена

$$\xi\left(t_j\right) = \xi\left(t_i\right) + \xi'(t_i)\tau + \frac{\xi''(t_i)}{2}\tau^2 + \ldots + \frac{\xi^{(n)}}{n!}\tau^n + \ldots \tag{2.8.37}$$

или в более симметричном виде

$$\frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi_i' + \frac{\xi_i''}{2!}\tau + \ldots + \frac{\xi^{(n)}\tau^{n-1}}{n!} + \ldots \tag{2.8.38}$$

Как видно из (2.8.38), все случайные величины (2.8.36) имеют определенное значение при переходе случайного процесса $\xi(t)$ из точки $(\xi_i,\ t_i)$ в току $(\xi_i,\ t_j = t_i + \tau)$, но не в равной степени. Так же, как в (2.8.29), устремим τ к нулю, при этом из (2.8.38) получим

$$\lim_{\tau \to \pm 0} \frac{\xi_j - \xi_i}{\tau_k} = \xi'_k \,. \qquad (2.8.39)$$

Таким образом, единственной случайной величиной, удовлетворяющей всем вышеперечисленным требованиям на исследуемом интервале времени $[t_i = t_k - \tau/2; \ \ t_j = t_k + \tau/2]$, при $\tau \to \pm 0$, является первая производная исходного случайного процесса ξ'_k в серединном сечении t_k. Следовательно, остается положить, что случайная величина p в выражении (2.8.35) линейно связана только с ξ'_k, т. е.

$$p = \frac{\xi'_k}{h}, \qquad (2.8.40)$$

где h – коэффициент пропорциональности.

Подставляя (2.8.40) в (2.8.32) – (2.8.35) с учетом (2.8.16), находим искомую процедуру получения ПРВ производной $\rho(\xi'_k)$ случайного процесса ξ_k в сечении t_k при известной одномерной ПРВ $\rho(\xi_k)$.

Таким образом, в случае стационарного марковского, хотя бы один раз дифференцируемого случайного процесса, искомая ПРВ $\rho(\xi'_k)$ может быть определена по следующему алгоритму (индекс k для краткости в дальнейшем опускается):

1. Заданная одномерная ПРВ $\rho(\xi)$ представляется в виде произведения двух ПАВ $\varphi(\xi)$:

$$\rho(\xi) = \varphi(\xi)\varphi(\xi)\,. \qquad (2.8.41)$$

2. Осуществляются два преобразования Фурье

$$\varphi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \exp\{i\xi'\xi / h\} d\xi \,, \qquad (2.8.42)$$

$$\varphi * (\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \exp\{-i\xi'\xi / h\} d\xi \,. \qquad (2.8.43)$$

3. Окончательно для произвольного сечения случайного стационарного процесса получим искомую ПРВ производной случайного стационарного марковского процесса ξ_k

$$\rho(\xi') = \varphi(\xi')\varphi^*(\xi') = |\varphi(\xi')|^2 \,. \qquad (2.8.44)$$

Для выяснения физической сути коэффициента пропорциональности h воспользуемся сравнением с известными результатами. Данный подход не безупречен с точки зрения математической строгости, но позволяет достаточно эффективно получить конкретный, практически важный результат.

Рассмотрим стационарный гауссовский, случайный процесс. При этом в каждом сечении этого процесса случайная величина ξ распределена по гауссовскому закону:

$$\rho(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^{2}}}\exp\left\{-(\xi-m_{\xi})^{2}/2\sigma_{\xi}^{2}\right\}, \qquad (2.8.45)$$

где ${\sigma_{\xi}}^{2}$ и m_{ξ} – дисперсия и математическое ожидание исходного гауссовского, случайного процесса.

Осуществляя с ПРВ (2.8.45) последовательность операций (2.8.41) – (2.8.44), получим ПРВ производной:

$$\rho(\xi')\frac{1}{\sqrt{2\pi\left[h/2\sigma_{\xi}\right]^{2}}}\exp\left\{-(\xi')^{2}/(2\left[h/2\sigma_{\xi}\right]^{2})\right\}. \qquad (2.8.46)$$

С другой стороны, с помощью известной процедуры (2.8.10) – (2.8.12) для аналогичного случая получим [14,15]

$$\rho(\xi')=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi'}}}\exp\left\{-(\xi')^{2}/2\sigma_{\xi'}^{2}\right\}, \qquad (2.8.47)$$

где $\sigma_{\xi'}=\sigma_{\xi}/\tau_{\text{кор}}$ ($\tau_{\text{кор}}$– радиус корреляции исходного, случайного процесса).

Сравнивая выражения (2.8.46) и (2.8.47), находим, что они идентичны при выполнении условия

$$h=\frac{2\sigma_{\xi}^{2}}{\tau_{кор}}. \qquad (2.8.48)$$

Необходимо отметить, что в статистической физике и в квантовой механике для перехода от координатного представления функции состояния элементарной частицы к ее импульсному представлению применяется формальная процедура практически аналогичная процедуре (2.8.41) – (2.8.44). Ощутимое различие заключается только в определении коэффициента пропорциональности h. В квантовой механике $h = \hbar/m_r$, где $\hbar$ – универсальная постоянная Планка, m_r – масса элементарной частицы, тогда как в данной работе показано, что h связано с параметрами исходного случайного процесса соотношением (2.8.48).

На основании формальной процедуры (2.8.41) – (2.8.44) можно так же получить ПРВ $\rho(\xi_i'')$ второй производной исходного, по крайней мере дважды дифференцируемого случайного процесса ξ_i. Для этого в качестве случайного процесса следует рассматривать уже один раз продифференцированный исходный процесс $\xi'(t) = \partial\xi(t)/\partial t$, при этом ПРВ $\rho(\xi'_i)$ определяется посредством применения той же процедуры (2.8.41) – (2.8.44). Тогда распределение второй производной можно определить с помощью той же процедуры, только при этом вместо $\rho(\xi_i)$ в (2.8.41) необходимо подставить уже $\rho(\xi'_i)$. Аналогично может быть получена ПРВ $\rho(\xi_i^{(n)})$ любой производной n раз дифференцируемого стационарного марковского процесса с помощью рекуррентной процедуры

1. $$\rho(\xi^{(n-1)}) = \varphi\left(\xi^{(n-1)}\right)\varphi\left(\xi^{(n-1)}\right)\ ; \tag{2.8.49}$$

2. $$\varphi\left(\xi^{(n)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_n}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi^{(n-1)})\exp\left\{\frac{-i\xi^{(n)}\xi^{(n-1)}}{h_n}\right\}d\xi^{(n-1)}, \tag{2.8.50}$$

$$\varphi^*\left(\xi^{(n)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_n}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi^{(n-1)})\exp\left\{\frac{i\xi^{(n)}\xi^{(n-1)}}{h_n}\right\}d\xi^{(n-1)}; \tag{2.8.51}$$

3. $$\rho(\xi^{(n)}) = \varphi\left(\xi^{(n)}\right)\varphi^*\left(\xi^{(n)}\right),\quad \text{где}\quad h_n = \frac{2o^2_{\xi^{(n-1)}}}{\tau_{кор\,\xi^{(n-1)}}}\ , \tag{2.8.52}$$

где $\sigma^2_{\xi^{(n-1)}}$, $\tau_{кор\ \xi^{(n-1)}}$ – дисперсия и радиус корреляции $n-1$ раз дифференцируемого процесса.

Таким образом, поставленная задача определения ПРВ $\rho(\xi^{(n)})$ производной n-го порядка в t_i-м сечении по крайней мере n раз дифференцируемого случайного стационарного в узком смысле процесса при известной только одномерной его ПРВ $\rho(\xi_i)$ решается на основании рекуррентной процедуры (2.8.49) – (2.8.52).

Алсигна пришла к важному выводу, что квантово-механический переход от координатного представления к импульсному применим лишь к стационарным марковским процессам. То есть к так называемым процессам «без последействия». Такой процесс перед следующим шагом «забывает» все свои предыдущие состояния.

К аналогичному выводу пришли И. Пригожин и И. Стенгерс, показавшие в [42, 43], что квантово-механический формализм инвариантен во времени по причине отсутствия последействия, т. е. корреляционных связей с предыдущими состояниями системы.

Приведенный здесь алгоритм перехода от координатного представления $\rho(\xi_i)$ к «импульсному» $\rho(\xi'_i)$ и обратно получается при конкретном виде δ-функции (2.8.29), физическое содержание которой заключается в марковости исходного стационарного, случайного процесса.

Интересно было бы посмотреть к каким результатам может привести использование других видов δ-функции, связанных с другими физическими условиями протекания случайных процессов.