3.12. Относительность времени и сокращение длины [8]

Подойдем к обсуждаемой в предыдущем пункте проблеме с несколько иной стороны. Рассмотрим произвольную систему отсчета $x^0 = ct,\ \ x^1,\ \ x^2,\ \ x^3$ при этом квадрат усредненного интервала задается выражением (3.107):

$$<ds>^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{3.131}$$

Из вида (3.131) следует, что метрический тензор симметричен:

$$g_{ik} = g_{ki}\,. \tag{3.133}$$

Распишем выражение (3.131), выделив нулевые индексы:

$$<ds>^2 = c^2 g_{00}\, dt^2 + 2cg_{0\alpha}\, dx^\alpha dt + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta, \tag{3.134}$$

где $\alpha,\, \beta = 1, 2, 3$.

Теперь сделаем то же, что мы делали раньше при получении преобразований Лоренца (см. п. 3.6): на основании первых двух членов (3.134) построим положительную величину. Для этого к правой части (3.134) прибавим и вычтем квадрат величины

$$\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}.$$

В результате получим

$$< ds >^2 = c^2\left[\sqrt{g_{00}}\,dt + \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\right]^2 - \left[-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right]dx^\alpha dx^\beta. \tag{3.135}$$

Таким образом, для произвольных систем отсчета мы имеем аналог собственного времени

$$d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt + \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{c\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{3.136}$$

Второй член в (3.135) есть не что иное, как квадрат усредненного расстояния между двумя точками трехмерной протяженности (3.120)

$$<dl>^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta, \tag{3.137}$$

где введен тензор (3.121)

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}. \tag{3.138}$$

Следует также отметить, что в общем случае выражение (3.136) не является полным дифференциалом, так как оно содержит компоненты метрического тензора, который в общем случае является некоторой функцией координат и не всегда удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{g_{00}} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{g_{0\alpha}}{c\sqrt{g_{00}}}; \qquad \frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{g_{0\beta}}{\sqrt{g_{00}}}\,, \tag{3.139}$$

выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы правая часть соотношения (3.136) являлась полным дифференциалом. Поэтому хотя усредненный интервал вида (3.131) в произвольной допустимой системе координат и может быть представлен в виде

$$<ds>^2 = (df^{\,0})^2 - (df^{\,1})^2 - (df^{\,2})^2 - (df^{\,3})^2, \tag{3.140}$$

величины df^i (x^0, x^1, x^2, x^3) в общем случае не будут являться полными дифференциалами. В том случае, если величины df^i (x^0, x^1, x^2, x^3) являются полными дифференциалами

$$df^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^k} dx^k, \qquad (3.141)$$

то свето-геометрия, наложенная на усредненную внешнюю сторону $\lambda_{m\text{-}n}$ - вакуума, будет носить характер псевдоевклидовой геометрии. Таким образом, метрические коэффициенты в этом случае имеют вид

$$g_{ik} = \frac{\partial f^0}{\partial x^i}\frac{\partial f^0}{\partial x^k} - \frac{\partial f^1}{\partial x^i}\frac{\partial f^1}{\partial x^k} - \frac{\partial f^2}{\partial x^i}\frac{\partial f^2}{\partial x^k} - \frac{\partial f^3}{\partial x^i}\frac{\partial f^3}{\partial x^k}. \qquad (3.142)$$

Они выражаются через четыре произвольные функции f^0, f^1, f^2, f^3. Используя выражения (3.140), получим

$$< ds >^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \left(\frac{\partial f^0}{\partial x^i} dx^i\right)^2 - \left(\frac{\partial f^1}{\partial x^i} dx^i\right)^2 - \left(\frac{\partial f^2}{\partial x^i} dx^i\right)^2 - \left(\frac{\partial f^3}{\partial x^i} dx^i\right)^2. \qquad (3.143)$$

Для того чтобы найти общий вид метрических коэффициентов в инерциальной системе отсчета, выберем в трехмерном пространстве произвольные криволинейные координаты согласно преобразованию

$$x'^{\alpha} = f^{\alpha}(x^1, x^2, x^3) \qquad (3.144)$$

и введем новое время

$$x'^0 = f^0(x^0, x^1, x^2, x^3). \qquad (3.145)$$

Преобразования (3.144) и (3.145) не выводят нас из заданной инерциальной системы отсчета, и мы их будем называть допустимыми преобразованиями в инерциальной системе отсчета. Тогда метрические коэффициенты в инерциальной системе отсчета примут наиболее общий вид:

$$g_{00} = (\partial f^0/\partial x^0)^2;$$

$$g_{0\alpha} = (\partial f^0/\partial x^0)(\partial f^0/\partial x^{\alpha});$$

$$g_{0\beta} = \left(\frac{\partial f^0}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial f^0}{\partial x^{\beta}}\right) - \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right).$$

Поэтому в инерциальных системах отсчета метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ будет иметь следующую структуру:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \sum_{\nu=1}^{3}\left(\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right)\left(\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\right).$$

Отсюда непосредственно следует, что компоненты физической скорости в инерциальных системах отсчета имеют вид

$$v^{\alpha} = (\partial f^{\alpha}/\partial x^{\beta})\,(dx^{\alpha}/d\tau), \qquad (3.146)$$

причем величина $d\tau$ является полным дифференциалом. В любой же неинерциальной системе отсчета величина $d\tau$ уже не будет полным дифференциалом. Используя предыдущее выражение, получим:

$$v = \langle dl\rangle/d\tau; \quad \langle dl\rangle^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta}. \qquad (3.147)$$

В инерциальных системах отсчета и в отсутствии сил движение пробной частицы является прямолинейным и равномерным:

$$x'^{\alpha} = x_0' + v^{\alpha}(\tau - \tau_0). \qquad (3.148)$$

Величины $d\tau$ и <dl>, определяемые формулами (3.136) и (3.137), названы физическими, так как они не зависят от выбора системы координат в данной инерциальной системе отсчета, поскольку они инвариантны относительно преобразований (3.144) и (3.145).

Чтобы вернуться к протяженности λ_{m-n} -вакуума («пустынному», «прозрачному» участку псевдоповерхности Естества) как к предмету нашего рассмотрения, напомним следующее. Для того чтобы наложить на ландшафт пустынного слоя псевдоповерхности Естества метрическую сетку, описывающую ее метрико- динамические свойства, мы можем в любой локальной области данного слоя применить радиолокационный метод. То есть, учитывая свойство луча (или, точнее, эйконала) светового сигнала с несущей длиной волны, соответствующей исследуемому λ_{m-n} -вакууму, распространяться по геодезической линии лежащей на его протяженности, мы можем восстановить геометрию и вырисовать ландшафт исследуемого участка λ_{m-n} -вакуума. Для этого мы должны провести радиолокационные измерения этого участка с помощью установки, показанной на рис.3.13, с десяти различных направлений (рис. 3.14).

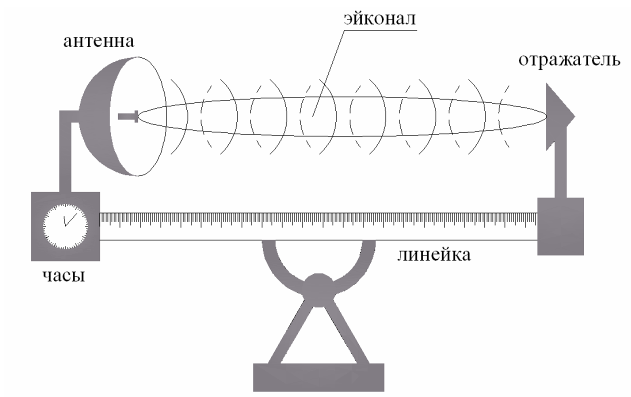

Рис. 3.13

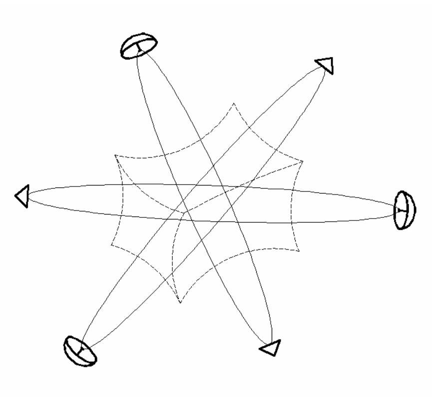

Рис. 3.14

Далее на основании десяти таких измерений необходимо по специальной методике, приведенной во многих изданиях по ОТО, вычислить десять усредненных компонентов метрического тензора g_{ik} . Всего компонент метрического тензора 16, но в силу условия симметричности (3.133) шесть из них оказываются связанными. Поэтому достаточно вычислить только десять из них. Далее получив все 16 компонент g_{ik}, мы можем восстановить метрические и динамические свойства одной из сторон исследуемого объема λ_{m-n} -вакуума. Для этого и предназначены полученные выше соотношения (3.134), (3.135), (3.136), (3.137), (3.138) и (3.147).

Радиолокационный сигнал содержит информацию сразу о двух сторонах протяженности λ_{m-n} -вакуума, так как можно полагать, что прямой луч (от излучателя до отражателя) световой сигнал проходит по внешней стороне данного участка λ_{m-n} -вакуума, а отраженный луч (от отражателя до приемника) – по его внутренней стороне. При этом прохождение прямого луча описывается интервалом (3.55) с сигнатурой (– + + +), а обратного луча – интервалом (3.55а) с сигнатурой (+ – – –). Поэтому радиолокационная методика требует более детального обоснования, о чем речь пойдет в следующих главах.