3.9. Малые 3-деформации участков псевдоповерхности Естества

В предыдущих пунктах было показано, как с помощью свето-геометрического («радиолокационного») и «пробно-частичного» методов можно выявлять и описывать усредненные ламинарные, вращательные и равноускоренные движения участков одного из $\lambda_{m \div n}$ -вакуумов в толще псевдоповерхности Естества. Но, как выяснится далее, «чистых» движений в $\lambda_{m \div n}$ -вакуумах не бывает. Любое движение одной из сторон любого «пустынного» слоя псевдоповерхности Естества приводит не только к возникновению противотока с другой его стороны, но и неминуемо влечет за собой появление искажений и деформаций в «теле» данной вакуумной протяженности. И наоборот, любая деформация или искривление локального участка $\lambda_{m \div n}$ -вакуума неминуемо приводят его толщу в тот или иной вид движения. Однако если при больших деформациях внутренним движением в $\lambda_{m \div n}$ -вакуумах пренебрегать нельзя, то в случае слабых искажений его внутренние движения оказываются незначительными, что и позволяет рассуждать о «чистых» деформациях локальных участков исследуемой «пустынной» протяженности. Под «чистой» деформацией в данном случае подразумевается локальное искривление протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума без возникновения в ней внутреннего движения.

Еще раз подчеркнем, что Алсигна твердо стоит на убеждении, что в $\lambda_{m \div n}$ -вакуумах локальных деформаций без движения не бывает, так же как не бывает локальных течений участков $\lambda_{m \div n}$ -вакуума без их деформации. В данном пункте допускается существование «чистой» деформации λ_{m-n} -вакуума лишь в виде грубой модели для упрощенного изложения основных положений настоящей теории.

В силу того, что в данном пункте мы абстрагируемся от незначительных течений в слабоискаженной области $\lambda_{m \div n}$ -вакуума, 4-мерное рассмотрение оказывается излишним, т. к. для описания «чистых» деформаций вполне достаточно 3 измерений. При этом такой «остекленевший» $\lambda_{m \div n}$ -вакуум оказывается в поле досягаемости классической теории упругости.

Одно из достоинств Науки заключается в том, что Она способна вырабатывать алгоритмы и математические модели безотносительно к какому-либо конкретному объекту. Этим достоинством обладает и классическая теория упругости, которая применима практически к любым сплошным протяженностям, в том числе к любому из слабоискривленных участков $\lambda_{m \div n}$ -вакуума.

При всех предыдущих оговорках рассмотрим «чистую» деформацию локального участка одной из сторон протяженности λ_{m-n} -вакуума без учета внутренних движений.

Запишем интервал (3.55) в следующем виде:

$$\langle ds \rangle^2 = c^2 dt^2 - \langle dr \rangle^2 , \tag{3.83}$$

где $\langle dr \rangle$ – среднее расстояние между двумя точками недеформированного участка протяженности вакуума. Причем

$$\langle dr \rangle^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 . \tag{3.84}$$

Приведенный ниже материал взят из раздела классического курса физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, посвященного теории упругости [11].

Пусть положение каждой точки исследуемого участка некой 3-мерной протяженности определяется ее радиус-вектором $\boldsymbol{r}$ (с компонентами $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$) в системе координат X, Y, Z. При деформировании участка этой протяженности все его точки, вообще говоря, смещаются относительно исходного положения.

Рассмотрим какую-нибудь определенную точку, принадлежащую исследуемому участку протяженности «остекленевшего» λ_{m-n} -вакуума. Если ее радиус-вектор до деформирования был $\boldsymbol{r}$, то на деформированном участке он будет иметь некоторое другое значение $\boldsymbol{r}'$ (с компонентами x'_i) (рис. 3.10). Смещение точки рассматриваемой сплошной протяженности при ее деформировании отображается вектором перемещения $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}$ с компонентами:

$$u_\alpha = x'_\alpha - x_\alpha . \tag{3.85}$$

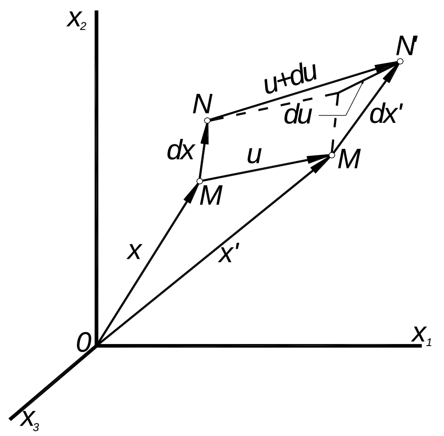

Рис. 3.10

Координаты x'_α перемещенной точки протяженности являются функциями от координат x_α той же точки до ее смещения. Поэтому и вектор перемещения u_α является функцией координат x_α. Задание вектора $\boldsymbol{u}$ как функции от x_α полностью определяет деформацию исследуемого участка 3-мерной протяженности.

Рассмотрим какие-нибудь две бесконечно близкие точки, принадлежащие исследуемому участку 3-мерной протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума. Если радиус-вектор между ними до деформирования раскладывался на dx_i, то в деформированном участке радиус-вектор между теми же двумя точками будет, согласно (3.85), иметь разложение на

$$dx'_i = dx_i + du_i \,. \tag{3.86}$$

Само расстояние между этими точками протяженности до деформирования было равно

$$< dr >= \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}\,,$$

а после деформирования стало

$$< dr' >= \sqrt{dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2}\,.$$

Согласно общему правилу написания сумм[1], мы можем записать:

$$<dr>^2 = dx_\alpha dx_\alpha\,, \quad <dr'>^2 = (dx_\alpha + du_\alpha)(dx_\alpha + du_\alpha)\,.$$

Подставляя

$$du_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} dx_k\,,$$

перепишем dr'^2 в виде

$$< dr' >^2 = < dr >^2 + 2\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} dx_\alpha dx_k + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_l} dx_k dx_l\,. \tag{3.87}$$

Поскольку во втором члене справа производится суммирование по обоим индексам α и k, то можно написать:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} dx_\alpha dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} dx_\alpha dx_k\,.$$

В третьем же члене поменяем местами индексы α и l. Тогда мы получим окончательно $<dr'>^2$ в виде

$$<dr'>^2 = <dr>^2 + \varepsilon_{\alpha k}\, dx_\alpha dx_k\,, \tag{3.88}$$

где тензор $\varepsilon_{\alpha k}$ определяется посредством компонент

$$\varepsilon_{\alpha k} = \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_l}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right). \tag{3.89}$$

Этими выражениями определяется изменение элемента длины при «чистом» деформировании участка любой 3-мерной протяженности, в том числе и одной из сторон протяженности «остекленевшего» $\lambda_{m\div n}$ -вакуума.

Тензор $\varepsilon_{\alpha k}$ называется *тензором 3- деформации.* Из его определения видно, что он симметричен, т. е.

$$\varepsilon_{\alpha k} = \varepsilon_{k\alpha}\,. \tag{3.90}$$

Так получилось потому, что в (3.87) член $2\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} dx_\alpha dx_k$ записан в явно симметричном виде $\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right) dx_\alpha dx_k$.

[1] Следуя обычному правилу, мы везде опускаем знаки суммирования по векторным и тензорным индексам; по всем дважды повторяющимся (в данном выражении) индексам везде подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3.

Как и всякий симметричный тензор, тензор $\varepsilon_{\alpha k}$ может быть приведен в каждой данной точке к главным осям. Это значит, что в каждой данной точке 3-мерной протяженности можно выбрать такую систему координат, в которой из всех компонент $\varepsilon_{\alpha k}$ отличны от нуля только «диагональные» компоненты ε_{11}, ε_{22}, ε_{33}. Эти компоненты – главные значения тензора деформации – обозначим посредством $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$. Надо, конечно, помнить, что если тензор $\varepsilon_{\alpha k}$ приведен к главным осям в некоторой точке тела, то он, вообще говоря, не диагонален во всех других точках.

Если тензор деформации приведен в данной точке «остекленевшего» $\lambda_{m\div n}$ -вакуума к главным осям, то в окружающем ее элементе объема элемент длины (3.87) приобретает вид

$$\langle dr'\rangle^2 = (\delta_k + \varepsilon_{\alpha k})dx_\alpha dx_k = (1+ \varepsilon^{(1)})dx_1^{\,2} + (1+ \varepsilon^{(2)})dx_2^{\,2} + (1+ \varepsilon^{(3)})dx_3^{\,2}. \qquad (3.91)$$

Мы видим, что это выражение распадается на три независимых члена. Это значит, что в каждом элементе объема «остекленевшего» $\lambda_{m\div n}$ -вакуума «чистую» деформацию можно рассматривать как совокупность трех независимых «чистых» деформаций по трем взаимно перпендикулярным направлениям – главным осям тензора 3-деформации. Каждая из этих «чистых» деформаций представляет собой просто растяжение (или сжатие) вдоль соответствующего направления, например, длина dx_1 вдоль первой главной оси превращается в длину

$$dx' = \sqrt{1+\varepsilon^{(1)}}\,dx_1. \qquad (3.92)$$

Согласно (3.92) можно записать выражение

$$\sqrt{1+\varepsilon^{(\alpha)}} - 1 = \frac{dx'_a - dx_a}{dx_a}, \qquad (3.93)$$

представляющее собой относительные удлинения вдоль осей координат x_a. При незначительных «чистых» деформациях относительные удлинения малы по сравнению с единицей. При этом в (3.89) последним членом можно пренебречь как малой величиной второго порядка. Таким образом, в случае малых деформаций тензор 3-деформации определяется выражением

$$\varepsilon_{\alpha k} = \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right). \qquad (3.94)$$

Относительные удлинения элементов длины вдоль направлений главных осей тензора 3-деформации (в данной точке) равны теперь с точностью до величин высших порядков малости

$$\sqrt{1+\varepsilon^{(\alpha)}} - 1 \approx \varepsilon^{(\alpha)}. \qquad (3.95)$$

т. е. непосредственно главным значениям тензора $\varepsilon_{\alpha k}$.

Рассмотрим какой-нибудь бесконечно малый элемент объема протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума dV и определим его величину dV' после деформирования. Для этого выберем в качестве осей координат главные оси тензора деформации в рассматриваемой точке. Тогда элементы длины dx_1, dx_2, dx_3 вдоль этих осей после деформирования перейдут в $dx_1 = (1 + \varepsilon^{(1)})\, dx_1$ и т. д. Объем dV есть произведение $dx_1\, dx_2\, dx_3$, объем же dV' равен $dx'_1\, dx'_2\, dx'_3$. Таким образом:

$$dV' = dV(1+ \varepsilon^{(1)})\,(1+ \varepsilon^{(2)})\,(1+ \varepsilon^{(3)}). \qquad (3.96)$$

Пренебрегая величинами высших порядков малости, находим отсюда

$$dV' = dV\,(1 + \varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)}). \qquad (3.97)$$

Но сумма $\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)}$ главных значений тензора есть, как известно, его инвариант и равна в любой системе координат сумме диагональных компонент $\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$. Таким образом, получим

$$dV' = dV(1 + \varepsilon_{\alpha\alpha}). \qquad (3.98)$$

Из (3.98) видно, что сумма диагональных компонент тензора малых деформаций представляет собой относительное изменение объема

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} + \frac{dV' - dV}{dV}. \tag{3.99}$$

Распространим наши рассуждения на 4-мерный случай малых деформаций протяженности одной из сторон псевдоповерхности $\lambda_{m \div n}$ - вакуума. Пусть интервал, описывающий метрико-динамическое состояние внешней стороны «пустого» участка псевдоповерхности Естества, равен

$$<ds'>^2 = c^2dt'^2 - <dr'>^2 . \tag{3.102}$$

Переход к деформированному состоянию участка протяженности вакуума можно описать посредством замены переменных

$$t = t'; \quad x_\alpha = x'_\alpha - u_\alpha \ , \tag{3.103}$$

где $u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2, x_3)$.

Обратные преобразования имеют вид:

$$t' = t \, ; \quad x'_\alpha = x_\alpha + u_\alpha \ . \tag{3.104}$$

После дифференцирования (3.103) и подстановки дифференциалов в (3.102) получим интервал, описывающий слабодеформированный участок внешней стороны «пустой» псевдоповерхности Естества ($\lambda_{m \div n}$-вакуума):

$$< ds >^2 = c^2 dt^2 - dx_\alpha dx_\alpha - 2\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k} dx_\alpha dx_k - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_k}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_l} dx_k dx_l \, , \tag{3.105}$$

Еще раз напомним, что интервал (3.105) описывает лишь малые деформации локального участка одной из сторон «пустынной» псевдоповерхности Естества, при этом неизбежно возникающие течения в деформированном участке $\lambda_{m\text{-}n}$-вакуума столь малы, что ими можно пренебречь. Отсутствие учета течений в исследуемом участке слабодеформированной области $\lambda_{m\text{-}n}$-вакуума отражается в интервале (3.105) тем, что коэффициент g_{00} перед слагаемым c^2dt^2 равен единице (т. е. в данном случае $g_{00} = 1$).