4.3. Четырехмерная, односторонняя (асимметричная) теория деформаций

Засуха бывает только из-за грабежа
Таанит, 7:2

В 3-й главе настоящего исследования было показано, что усредненные метрико-динамические свойства локального участка любого из $\lambda_{m\div n}$-вакуумов могут быть описаны посредством двух усредненных метрик: $<ds^{(-)}>^2$ с сигнатурой (+ – – –), описывающей внешнюю сторону протяженности исследуемого участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума, и $<ds^{(+)}>^2$ с сигнатурой (– + + +), описывающей его внутреннюю сторону. Приведем теперь обобщенный математический формализм, позволяющий построить асимметричную теорию «упругого» вакуума на основе принципов механики сплошных сред.

В данной главе практически без изменений приведена теория деформаций сплошной протяженности в интерпретации академика Л.И. Седова [12], за исключением стремления к двухстороннему рассмотрению замены термина «твердое тело» на «объем протяженности $\lambda_{m\div n}$-вакуума» и четырехмерного рассмотрения, в отличие от трехмерного. Основное отличие изложенного в этой главе от работы Л.И. Седова, по сути, заключается в подмене систем координат на системы отсчета.

4.3.1. Основные положения

В Б-ГЕ, Первопричине Живой и Активной, можно узреть два качества, необходимые одно для другого: Неподвижность и Движение, уравновешенные посредством Венца Высшей Силы [84].

Пусть относительно пассивной системы отсчета X^0, X^1, X^2, X^3, играющей фоновую роль внешней стороны идеального пространства-времени, движется некий участок внешней стороны протяженности $\lambda_{m\div n}$-вакуума (рис. 4.1). Внешняя и внутренняя стороны идеального пространства-времени отличаются только сигнатурами. Если сигнатура координатной сетки X^0, X^1, X^2, X^3, «наброшенной» на внешнюю сторону идеального пространства-времени: (– + + +), то сигнатура координатной сетки его внутренней стороны противоположна: (+ – – –).

Отметим два положения исследуемого участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума в начальный момент времени t_0 и в некоторый произвольный момент t. С каждой точкой M рассматриваемого участка $\lambda_{m\div n}$-вакуума можно связать сопутствующую систему отсчета $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$, как бы вмороженную в элементарный объем внешней стороны его протяженности и меняющуюся вместе с изменением состояния этого объема.

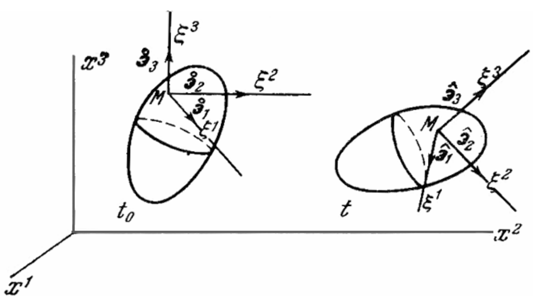

Рис 4.1

В двухсторонней (симметричной) теории деформации точка M рассматриваемого участка вакуума являлась бы началом отсчета сразу двух систем: $\xi^{(-)0}, \xi^{(-)1}, \xi^{(-)2}, \xi^{(-)3}$ – характеризующей метрико-динамические свойства внешней стороны его протяженности, и $\xi^{(+)0}, \xi^{(+)1}, \xi^{(+)2}, \xi^{(+)3}$ – характеризующей метрико-динамические свойства ее внутренней стороны. В данном разделе индексы в скобках опущены, поскольку мы рассматриваем только одну из сторон протяженности вакуума и, соответственно, рассматриваем динамику только одной системы отсчета $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$, неважно к какой из сторон протяженности принадлежащей.

Сопутствующая система отсчета будет двигаться вместе с исследуемым объемом, и векторы базиса сопутствующей системы в моменты t_0 и t в силу деформации будут разными. Обозначим их в момент t_0 через $\overset{0}{Э}_i$ (где i = 0, 1, 2, 3), а в момент t – через $Э_i$. Ясно, что векторы базиса сопутствующей системы координат зависят от точки M и меняются со временем.

Очевидно, что если система отсчета ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3 вморожена в исследуемый объем, а этот объем движется как абсолютно твердое тело, то тетрады $\hat{Э}_i$ можно получить из тетрад $\overset{0}{Э}_i$ посредством поступательного перемещения и поворота, при этом величины базисных векторов и углы между ними сохраняются:

$$\left|\overset{0}{Э}_i\right| = \left|\hat{Э}_i\right| \; и \; \angle \overset{0}{Э}_i \overset{0}{Э}_j = \angle \hat{Э}_i \hat{Э}_j \text{ , т. е. } \overset{0}{Э}_i \cdot \overset{0}{Э}_j = \hat{Э}_i \cdot \hat{Э}_j \, .$$

Сложнее обстоит дело в случае движения деформируемого участка одной из сторон протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума. Действительно, при движении деформируемого участка расстояния между его точками M и M' меняются. Координатные линии сопутствующей системы координат деформируются, а у векторов базиса $\hat{Э}_i$ меняются и их величины, и углы между ними.

Эффект изменения расстояний между точками сплошной протяженности во время движения очень важен. В частности, укажем на то, что силы взаимодействия между различными частями исследуемого участка протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума могут зависеть от расстояний между ними.

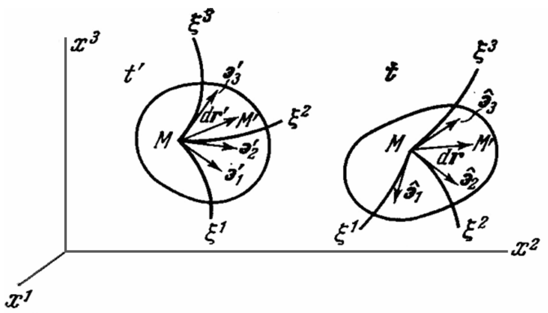

Рис. 4.2

Рассмотрим два произвольных положения деформируемого участка внешней стороны протяженности вакуума, и в частности его точек M' и M, в произвольные моменты времени t' и t (рис. 4.2). Векторы базиса в точке M в момент t' обозначим через $Э'_i$, а в момент t – через $\hat{Э}_i$. Очевидно, в сопутствующей системе координат имеем:

$$dr = d\xi^i \hat{Э}_i \quad и \quad dr' = d\xi^i Э'_i \, .$$

Мы хотим ввести в рассмотрение характеристики изменения расстояний, поэтому необходимо ввести метрические тензоры сопутствующей системы координат в моменты времени t' и t.

Еще до введения метрики укажем, что любой бесконечно малый отрезок прямой, выходящий из точки M, в процессе движения сплошной протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума переходит в малый отрезок прямой, выходящей из точки, соответствующей этой точке M.

Действительно, наряду с бесконечно малым элементом сплошной протяженности dr в момент t, которому в момент t' соответствовал dr', можно ввести в момент t элемент сплошной среды kdr, где k – некоторое число. В пространстве ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3 в момент t'этому элементу соответствовал элемент kdr', так как в этом пространстве в силу сохранения координат всех точек сплошной среды должно иметь место разложение по векторам базиса $Э'_i$:

$$kd\xi^i Э'_i = kdr' \, . \tag{4.1}$$

При разных конечных k в данном dr элементы kdr определяют в момент t малый отрезок прямой, выходящий из точки M, которому в системе отсчета ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3 в момент t' соответствовал малый отрезок прямой kdr'. Теперь введем метрики с помощью сопутствующей системы отсчета в моменты времени t'и t. Пусть в момент времени t:

$$|dr| = ds, \;\; ds^2 = \hat{g}_{ij} d\xi^i d\xi^j, \;\; где \;\; \hat{g}_{ij} = \hat{Э}_i \cdot \hat{Э}_j \, , \tag{4.2}$$

а в момент t':

$$|dr'| = ds', \; ds'^2 = g'_{ij} d\xi^i d\xi^j, \; где \; g'_{ij} = Э'_i \cdot Э'_j \, . \tag{4.3}$$

В данном разделе знаки усреднения <…> опущены. Но необходимо помнить, что речь идет об усредненной стороне протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума, витающей подобно плавной иллюзии над сложнейшими, мелкими флуктуациями его ультраструктуры.

Подчеркнем, что координаты точек M и M' в моменты t и t' в сопутствующей системе координат одинаковые, а компоненты метрических тензоров $\hat{g}_{ij}$ и g'_{ij} разные. Назовем коэффициентом относительного удлинения отношение

$$l = \frac{ds - ds'}{ds'} = \frac{ds}{ds'} - 1, \tag{4.4}$$

где ds и ds' проходят в соответствующие моменты времени через одни те же индивидуальные точки одной из сторон протяженности вакуума. Коэффициент относительного удлинения l зависит от точки M и направления элемента, для которого он вычисляется, и не зависит от его длины dr.

Если относительное удлинение l в каждом направлении и в каждой точке деформированного участка одной из сторон протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума бесконечно мало, то деформация называется бесконечно малой. Если l имеет конечное значение, то деформация конечна. По определению для абсолютно твердого тела все коэффициенты l равны нулю. Введем обозначение

$$\varepsilon_{ij} = \left(g_{ij} - g'_{ij}\right). \tag{4.5}$$

Вычитая (4.3) из (4.2), получим

$$\langle ds^2 - ds'^2 \rangle = \varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j. \tag{4.6}$$

В классической теории деформации обычно принято писать

$$ds^2 - ds'^2 = 2\varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j, \tag{4.6а}$$

при этом

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g_{ij} - g'_{ij}\right). \tag{4.6б}$$

В данном исследовании множитель «2» в правой части (4.6а) мы опустили, полагая подспудно, что тензор деформаций ε_{ij} *характеризует среднеарифметическое отклонение от исходного состояния, т. е.*

$$\langle ds^2 - ds'^2 \rangle = \frac{(ds^2 - ds'^2)}{2} = \varepsilon_{ij} d\xi^i d\xi^j. \tag{4.6в}$$

Данный подход более приемлем для «двухсторонней» (симметричной) теории деформации, которая будет развиваться в последующих главах.

Из (4.5) видно, что ε_{ij} можно рассматривать как ковариантные компоненты тензора 4-деформаций. Как известно, с помощью любого тензора второго ранга можно по ковариантным компонентам некоторого тензора образовать его контравариантные компоненты. В нашем случае можно поднимать индексы либо с помощью $g^{ij}{}'$, либо с помощью g^{ij} и поэтому по ковариантным компонентам ε_{ij} можно образовывать два разных набора контравариантных компонент: ε^{ij} (индексы поднимаются посредством g^{ij}) и $\varepsilon^{ij}{}'$ (индексы поднимаются посредством g'^{ij}). Это означает, что можно образовывать два разных тензора

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij} Э^i \cdot Э^j \quad и \quad \varepsilon' = \varepsilon_{ij} Э'^i \cdot Э'^j, \tag{4.7}$$

имеющих одинаковые ковариантные компоненты (4.5), но отнесенных к разным базисам $Э^i$ и $Э'^i$.

Тензоры 4-деформаций (4.7) являются основными характеристиками деформаций, возникающих на локальных участках одной из сторон протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума. Их компоненты входят в основные уравнения, описывающие метрические и динамические свойства этих участков.

Приведем некоторые примеры. В случае равномерного и прямолинейного движения участка одной из сторон протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума актуальное состояние его участка задается квадратом усредненного интервала (3.64)

$$ds^2 = (1 - v^2/c^2)c^2dt^2 - 2v_x dxdt - 2v_y dydt - 2v_z dzdt - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

которому соответствует усредненный метрический тензор

$$g'_{ij} = \begin{matrix} \left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right) & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & -1 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & -1 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & -1 \end{matrix}, \tag{4.8}$$

а в качестве исходного усредненного состояния того же участка одной из сторон протяженности $\lambda_{m\div n}$-вакуума естественно положить состояние покоя, которое соответственно задается интервалом (3.55)

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{4.9}$$

с метрическим тензором

$$g_{ij} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}. \tag{4.10}$$

Подставляя соответствующие компоненты метрических тензоров (4.8) и (4.10) в (4.5) получим 4-мерный тензор деформаций участка, например, внешней стороны протяженности вакуума в случае ее прямолинейного и равномерного движения в составе глобального потока:

$$\varepsilon_{ij} = \left(g'_{ij} - g_{ij}\right) = \begin{matrix} -\dfrac{v^2}{c^2} & -v_x & -v_y & -v_z \\ -v_x & 0 & 0 & 0 \\ -v_y & 0 & 0 & 0 \\ -v_z & 0 & 0 & 0 \end{matrix}. \tag{4.11}$$

Аналогично можно получить тензор деформации участка одной из сторон протяженности $\lambda_{m\div n}$-вакуума, находящегося во вращательном движении. При этом интервал актуального состояния задается выражением

$$ds^2 = (1 - \rho^2\Omega^2/c^2)c^2dt^2 - (2\rho^2\Omega/c)d\varphi dt - d\rho^2 - \rho^2d\varphi^2 - dz^2, \tag{4.12}$$

а исходное состояние задается с помощью цилиндрической системы координат и соответствующему этой системе квадрату интервала

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\rho^2 - \rho^2d\varphi^2 - dz^2. \tag{4.13}$$

В результате подстановки компонент метрических тензоров актуального (4.12) и исходного (4.13) состояний в (4.5) получим тензор 4-деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \left(g'_{ij} - g_{ij}\right) = \begin{matrix} -\dfrac{\rho^2\Omega^2}{c^2} & 0 & -\dfrac{\rho^2\Omega}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\rho^2\Omega}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}. \tag{4.14}$$

Ясно, что в интересующий нас момент времени t' величины деформации зависят не только от рассматриваемого состояния участка протяженности $\lambda_{m\div n}$-вакуума, но и от того, по отношению к какому исходному состоянию протяженности эти деформации вычисляются. Как выбрать это состояние, если мы хотим получить определенные физические характеристики деформации? Очевидно, оно не может быть совершенно произвольным, а должно быть определено из конкретных физических соображений. Назовем состояние, каким-то образом выбираемое для сравнения с *актуальным* состоянием сплошной среды, состояние *исходным* и укажем на могущее встретиться при этом следующее обстоятельство. Это начальное состояние не обязательно должно быть реально осуществимым. Например, за начальное состояние можно принять такое мысленно введенное состояние, в котором структура каждого элемента одной из сторон протяженности $\lambda_{m\div n}$-вакуума упорядочена и элемент предоставлен самому себе, т. е. на него не действуют никакие силы. Обозначим метрику в этом мысленно введенном состоянии через $\overset{0}{g}_{ij}$, а векторы базиса сопутствующей системы в начальном состоянии – через $\overset{0}{Э}_i$. Очевидно, что введенная таким образом метрика может оказаться неевклидовой. Реальное же движение сплошной протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума происходит на фоне евклидового, идеального пространства-времени, и, следовательно, в общем случае может не существовать действительного (реального) перехода из исходного состояния в актуальное. Идеальное вымышленное «исходное» состояние (в кавычках) можно использовать для оценки изменения метрики и для введения тензора деформаций.

Поясним сказанное на примере движения в двухмерном евклидовом пространстве, т. е. на плоскости. Условимся рассматривать движение некоторой пленки в плоскости, а за начальное состояние выбирать такое, когда к пленке не приложены никакие силы. Пусть пленка растянута по краям и только благодаря этому растяжению остается плоской. Если же освободить пленку от растягивающих усилий, то она покоробится, покроется морщинами и, оставаясь двухмерной, уже не будет плоской. Установить взаимно однозначное соответствие между точками плоской пленки в данный момент и покоробленной, морщинистой (в случае снятия с нее всех нагрузок) можно, но для этого, вообще говоря, нужно выйти в трехмерное пространство; оставаясь в двухмерном пространстве, с сохранением евклидового типа его метрики, этого сделать нельзя. Поэтому нерастянутое, покоробленное состояние пленки по отношению к движениям в двухмерном евклидовом пространстве можно рассматривать только как «исходное состояние» (в кавычках). Итак, если вводимое по каким-то физическим соображениям начальное состояние как состояние сплошной протяженности может осуществляться мысленно или фактически с помощью некоторого движения, то это начальное состояние можно определить как начальное состояние без кавычек. Если же вводимое мысленно состояние сравнения не может быть получено непрерывным движением среды в том же самом пространстве, то это – «исходное состояние» (в кавычках).

В развиваемой в данном разделе теории деформации одной из сторон протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума между осями систем отсчета, описывающих его исходное x_0 , x_1 , x_2 , x_3 и актуальное x_0', x_1', x_2', x_3' состояния, как правило, существует однозначная, функциональная связь:

$$\begin{aligned} x^{0\prime} &= f(x^0, x^1, x^2, x^3); \\ x^{1\prime} &= f(x^0, x^1, x^2, x^3); \\ x^{2\prime} &= f(x^0, x^1, x^2, x^3); \\ x^{3\prime} &= f(x^0, x^1, x^2, x^3). \end{aligned} \tag{4.15}$$

В случае поступательного движения участка одной из сторон протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума эта связь задавалась выражениями (3.61), в случае вращательного движения – (3.78), (3.79), а в случае деформаций – (3.85).

В последующих разделах настоящего исследования выяснится, что континуальная псевдоповерхность Естества может быть «порвана», и в этом случае функциональных зависимостей типа (4.15) может не существовать. О трещинах и разрывных переходах состояния участка протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума будем говорить отдельно, т. к. этот процесс принципиально отличается от разрывов и тещин во всех известных атомистических средах, состоящих из атомов и молекул.

То, что псевдоповерхность Естества может быть «порвана» искусственным образом, с одной стороны может явиться доказательством справедливости данной теории. С другой стороны, теория, позволяющая разработать технологию разрыва непрерывного континуума псевдоповерхности Естества, может привести к неисчислимым бедствиям для человечества, а возможно, и к более страшным последствиям. Более того, именно эти разрывы оказались результатом Вселенской Катастрофы эпохи Становления и подлежат каболистическому изглаживанию, а Мироздание – исправлению. Отсюда особая ответственность исследователей «разрывов» перед ВСЕВЫШНИМ.

Но более всего следует молить ВСЕВЫШНЕГО, чтобы восстал Первосвященник с урим и тумим, дабы мы имели возможность вопрошать ЕГО о подобных экспериментах над «телом» Естества (т. е. над ЕГО «телом» Святости). Мы восходим на Вершину Разума, но там нас ждет точка перегиба – «Точка» неустойчивого равновесия. Наверное, что-то зависит и от нас, куда с этой «вершины» спустится Мир: в цветущие долины Рая или огненные бездны ада. В момент истины Карибского кризиса (22 – 28 октября 1962 г. – апогея ядерного века) человечеству хватило мужества выжить на земле. За это Хрущев лишился власти, а Кеннеди – жизни, но мы получили возможность жить и развиваться дальше. Если мы не поменяем своего отношения к Живой Природе, то следующий кризис разума будет несоизмеримо более страшным.

Компоненты $\overset{0}{g}_{ij}$ в общем случае могут зависеть от ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3; если вымышленное «исходное состояние» фиксированно, то $\overset{0}{g}_{ij}$ могут зависеть только от ξ^1, ξ^2, ξ^3. Выясним теперь геометрический смысл ковариантных компонент тензоров деформаций. Запишем компоненты метрических тензоров деформаций в следующем виде:

$$\tilde{g}_{ij} = \vec{Э}_i \cdot \vec{Э}_j = \left|\vec{Э}_i\right| \cdot \left|\vec{Э}_j\right| \cos\psi_{ij} \ , \tag{4.16}$$

где ψ_{ij} – углы между векторами $\vec{Э}_i$ и $\vec{Э}_j$,

и

$$\overset{0}{g}_{ij} = \overset{0}{Э}_i \cdot \overset{0}{Э}_j = \left|\overset{0}{Э}_i\right| \cdot \left|\overset{0}{Э}_j\right| \cos\overset{0}{\psi}_{ij} \ , \tag{4.17}$$

где $\overset{0}{\psi}_{ij}$ – углы между векторами $\overset{0}{Э}_i$ и $\overset{0}{Э}_j$.

Составим отношение

$$\frac{\left|\vec{Э}_i\right|}{\left|\vec{Э}_j\right|} = \frac{\left|\dfrac{dr}{\partial\xi'}\right|}{\left|\dfrac{dr_0}{\partial\xi'}\right|} = \frac{|dr_i|}{|dr_{0i}|} = \frac{ds_i}{ds_{0i}} = l_i + 1 , \tag{4.18}$$

где ds_{0i} – элементы дуг координатных линий ξ^i;

l_i – коэффициенты относительного удлинения в направлениях *i*.

Теперь с помощью (4.18) из (4.16) можно получить

$$\tilde{g}_{ij} = \left|\overset{0}{Э}_i\right| \cdot \left|\overset{0}{Э}_j\right| (1 + l_i)(1 + l_j) \cos\psi_{ij} \ , \tag{4.19}$$

а с помощью (4.17), (4.19) и (4.5), приняв за состояние сплошной среды в момент t_0 исходное состояние или «исходное состояние» $\overset{0}{g}_{ij}$, получим следующие формулы:

$$\varepsilon_{ij} = \left[(1 + l_i)(1 + l_j)\cos\psi_{ij} - \cos\overset{0}{\psi}_{ij}\right] \left|\overset{0}{Э}_i\right| \cdot \left|\overset{0}{Э}_j\right| , \tag{4.20}$$

которые удобны для геометрического истолкования ε_{ij}.

Рассмотрим сначала геометрическое истолкование ε_{ij} с одинаковыми индексами. Из (4.20) будем иметь

$$\varepsilon_{ij} = \left[(1 + l_i)^2 - 1\right] \overset{0}{g}_{ii} \ , \tag{4.21}$$

откуда

$$l_i = \sqrt{1 + \frac{\varepsilon_{ii}}{\overset{0}{g}_{ii}}} - 1 . \tag{4.22}$$

Если деформации малы, то ε_{ij} малы; разложив (4.22) в ряд, получим

$$l_i \approx \frac{\varepsilon_{ij}}{\overset{0}{g}_{ii}} . \tag{4.23}$$

Кроме того, если сопутствующая система в начальном состоянии взята декартовой, то $\overset{0}{g}_{ii} = 1$, и поэтому

$$l_i \approx \varepsilon_{ij} \ , \tag{4.24}$$

т. е. ковариантные компоненты тензоров деформаций с одинаковыми индексами в случае бесконечно малых деформаций совпадают с коэффициентами относительных удлинений вдоль декартовых осей координат начального состояния.

Обратимся к вопросу о геометрическом истолковании компонент ε_{ij} с различными индексами (при $i \neq j$).

Для этого ради простоты в «исходном» состоянии выберем в данной точке такую систему координат, в которой $\overset{0}{Э}_i$ взаимно ортогональны, т. е. $\overset{0}{\psi}_{ij} = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда, положив $\psi_{ij} = \dfrac{\pi}{2} - \chi_{ij}$ из (4.5), (4.16) и (4.17), получим

$$\varepsilon_{ij} = \left|\mathcal{Э}_i\right| \cdot \left|\mathcal{Э}_j\right| \sin \chi_{ij}$$

или

$$\sin \chi_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{\mathcal{g}_{ii}}\sqrt{\mathcal{g}_{jj}}}\,, \tag{4.25}$$

откуда видно, что в общем случае углы, бывшие в «исходном» состоянии прямыми, после деформации перестают быть прямыми, и ковариантные компоненты ε_{ij} с различными индексами ($i \neq j$) характеризуют скашивание первоначально прямого координатного угла. Если деформации бесконечно малы и система координат в начальном состоянии декартова, то $\overset{0}{g}_{ii} = 1$ и $\mathcal{g} = 1 + o(\varepsilon)$ (ε – бесконечно малая величина). С помощью разложения в ряд легко получим

$$\sin\chi_{ij} \approx \varepsilon_{ij} \tag{4.26}$$

или

$$\chi_{ij} \approx \varepsilon_{ij}\,. \tag{4.27}$$

С каждым симметричным тензором, в том числе и с тензорами деформаций, можно связать квадратичную форму $\varepsilon_{ij}\, d\xi^i d\xi^j$. В каждой точке можно найти такую ортогональную систему координат $\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3$, в которой квадратичная форма $\varepsilon_{ij}\, d\xi^i d\xi^j$ приведется к виду

$$\varepsilon_{ij}\, d\xi^i d\xi^j = \varepsilon'_{00}(d\eta^0)^2 + \varepsilon'_{11}(d\eta^1)^2 + \varepsilon'_{22}(d\eta^2)^2 + \varepsilon'_{33}(d\eta^3)^2\,. \tag{4.28}$$

Преобразование от ξ^i к η^i зависит от компонент ε_{ij}, поэтому соответствующий ортогональный тетрады η^i при движении будет вообще разным в различные моменты времени.

4.3.2. Вектор перемещений [12]

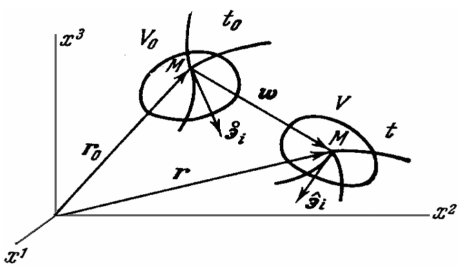

Рис. 4.3

Рассмотрим случай, когда начальное состояние может реально осуществляться и его метрика $\overset{0}{g}_{ij}$, как и метрика $\mathcal{g}_{ij}$, является евклидовой. В этом случае можно ввести вектор перемещения ϖ (рис. 4.3):

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \varpi\,, \tag{4.29}$$

где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}_0$ – радиусы-векторы относительно некоторой одной и той же точки M протяженности вакуума в начальный момент времени t_0 и в данный момент t соответственно. С помощью выражения (4.29) можно легко установить связь между векторами базисов $\mathcal{Э}_i$ и $\overset{0}{Э}_i$ и с помощью этой связи написать формулы для компонент тензора деформаций ε_{ij}. Продифференцировав (4.29) по ξ^i, получим связь

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} = \frac{\partial r}{\partial \xi^i} - \frac{\partial r_0}{\partial \xi^i} = \mathcal{Э}_i - \overset{0}{Э}_i\,,$$

откуда

$$\begin{cases} \overset{0}{\text{Э}}_i + \dfrac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} = \text{Ʒ}_i, \\ \text{Ʒ}_i - \dfrac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} = \overset{0}{\text{Э}}_i. \end{cases} \tag{4.30}$$

Поэтому

$$\mathfrak{g}_{ij} = \text{Ʒ}_i \cdot \text{Ʒ}_j = \overset{0}{\text{Э}}_i \cdot \overset{0}{\text{Э}}_j + \overset{0}{\text{Э}}_i \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^j} + \overset{0}{\text{Э}}_j \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^j},$$

и

$$\overset{0}{g}_{ij} = \overset{0}{\text{Э}}_i \cdot \overset{0}{\text{Э}}_j = \text{Ʒ}_i \cdot \text{Ʒ}_j - \text{Ʒ}_i \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^j} - \text{Ʒ}_j \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^j}.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \overset{0}{\varepsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} = \mathfrak{g}_{ij} - \overset{0}{g}_{ij} &= \overset{0}{\text{Э}}_i \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^j} + \overset{0}{\text{Э}}_j \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} + \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^j} = \\ &= \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} \cdot \text{Ʒ}_j + \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^j} \cdot \text{Ʒ}_i - \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial \xi^j}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Точки означают скалярные произведения между векторами. Формулы (4.31) верны при любом выборе криволинейных координат ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3. Заметим, что в выражении (4.31) для компонент ε_{ij} входят лишь первые производные от вектора перемещения ϖ по координатам ξ^0, ξ^1, ξ^2, ξ^3, которые характеризуют относительные перемещения точек сплошной среды.

Мы получили выражения для компонент тензора деформаций ε_{ij} через вектор перемещения ϖ. Теперь получим выражения компонент тензора деформаций ε_{ij} через компоненты вектора перемещений ϖ. Для этого необходимо установить, как выражается производная от вектора через производные от его компонент.

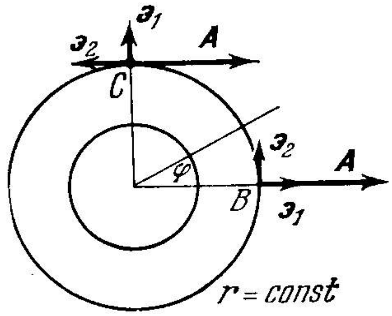

Рис. 4.4

Очевидно, обычные производные от компонент не определяют изменения самого вектора, так как при переходе от точки к точке пространства меняются, вообще говоря, и векторы базиса. В самом деле, возьмем, например, полярную систему координат на плоскости и рассмотрим поле постоянного как по величине, так и по направлению во всех точках плоскости вектора ***A***. Вектор ***A*** при переходе от точки к точке плоскости не меняется, и его производная, очевидно, должна равняться нулю. Координатами ξ^1 и ξ^2 будут радиус r и угол φ, векторы базиса будут направлены следующим образом: $\mathbf{Э}_1$ – по лучам, выходящим из начала координат, а $\mathbf{Э}_2$ – по касательным к окружностям r = const.

В разных точках плоскости $\mathbf{Э}_1$ и $\mathbf{Э}_2$ будут направлены по-разному, и компоненты постоянного вектора ***A*** в разных точках плоскости будут разными (см., например, точки *B* и *C* на рис. 4.4), т. е. производные от компонент постоянного вектора не будут равны нулю. В декартовой системе координат

$$\partial \varpi / \partial x^i = \partial(\varpi^k \mathbf{Э}_k)/\partial x^i = \mathbf{Э}_k \cdot \partial \varpi^k / \partial x^i, \tag{4.32}$$

так как базисные векторы $\mathbf{Э}_1 = \boldsymbol{i}$, $\mathbf{Э}_2 = \boldsymbol{j}$, $\mathbf{Э}_3 = \boldsymbol{k}$ не изменяются от точки к точке.

4.3.3. Ковариантное дифференцирование [12]

Немного поспи, немного подремли, немного полежи, сложа руки, – и прибежит бегом бедность твоя.

Мелех Шломо, Мишлей, 24:34

В произвольной криволинейной системе координат η^0, η^1, η^2, η^3 векторы базиса $\boldsymbol{Э}_i$ переменны, и поэтому нужно написать

$$\partial\,\varpi/\partial\eta^i = \boldsymbol{Э}_k\,\partial\,\varpi^k/\partial\eta^i + \varpi^k\partial\,\boldsymbol{Э}_k/\partial\,\eta^i. \tag{4.33}$$

Очевидно, по определению можно принять, что производная $\partial\,\boldsymbol{Э}_k/\partial\,\eta^i$ также представляет собой вектор, характеризующий свойства криволинейной системы координат. Разложим этот вектор по базису $\boldsymbol{Э}_j$ и обозначим компоненты этого разложения символами $\Gamma^j{}_{k\,i}$:

$$\partial\,\boldsymbol{Э}_k\,/\partial\eta^i = \Gamma^j{}_{ki}\,\boldsymbol{Э}_j\,. \tag{4.34}$$

Величины $\Gamma^j{}_{k\,i}$ являются функциями координат η^0, η^1, η^2, η^3 и называются коэффициентами связности. Ниже мы изучим величины $\Gamma^j{}_{k\,i}$ подробно. Эти коэффициенты тесно связаны с определением геометрических свойств математических моделей физических или фазовых пространств. В общем случае геометрических пространств эти коэффициенты можно задавать различными формулами. Ниже рассматриваются только евклидовы, псевдоевклидовы и римановы пространства, для которых по определению коэффициенты $\Gamma^i{}_{k\,j}$ выражаются только через компоненты метрического тензора g_{mn} и их производные по координатам. Задание величин $\Gamma^i{}_{k\,j}$ позволяет перейти от векторной алгебры к тензорному анализу.

Коэффициенты связности $\Gamma^i{}_{k\,j}$ позволяют переносить векторы и тензоры из одной точки в любые другие бесконечно близкие и удаленные точки пространства и таким путем сравнивать векторы и тензоры в соседних точках, что необходимо при конструировании производных по координатам x^k от векторов и тензоров любых порядков тоже как тензоров. Нижеследующие выводы и формулы действительны для манипулирования с тензорами в пространствах любого числа измерений и в частности в моделях метрических четырехмерных физических пространств. Подставляя (4.34) в (4.33), получим

$$\partial\varpi/\partial\eta^i = \partial\varpi^k/\,\partial\eta^i\,\boldsymbol{Э}_k + \varpi^k\,\Gamma^j{}_{ki}\,\boldsymbol{Э}_j\,.$$

Второй член представляет собой сумму по k и j. Поменяем в ней обозначения индексов суммирования k на j и j на k. Тогда можно написать

$$\partial\varpi/\partial\eta^i = \boldsymbol{Э}_k\,\partial\varpi^k/\partial\eta^i + \varpi^j\,\Gamma^k{}_{ji}\,\boldsymbol{Э}_k = (\partial\varpi^k/\partial\eta^i + \varpi^j\,\Gamma^k{}_{ji})\,\boldsymbol{Э}_k\,. \tag{4.35}$$

Коэффициенты при $\boldsymbol{Э}_k$, т. е. $\partial\varpi^k/\partial\eta^i + \varpi^j\,\Gamma^k{}_{ji}$, с двумя индексами имеют специальное обозначение $\nabla_i\varpi^k$; они называются ковариантными производными контравариантных компонент вектора ϖ :

$$\nabla_i\varpi^k = \partial\varpi^k/\partial\eta^i + \varpi^j\,\Gamma^k{}_{ji}\,. \tag{4.36}$$

В литературе для обозначения ковариантной производной часто используют точку с запятой

$$\varpi^k{}_{;\,i} = \nabla_i\varpi^k = \partial\varpi^k/\partial\eta^i + \varpi^j\,\Gamma^k{}_{ji}\,.$$

Установим свойства $\nabla_i\varpi^k$. В декартовой системе координат ($\eta^i = x^i$), так как $\partial\,Э_k/\partial x^i = 0$, т. е. $\Gamma^k{}_{ji} = 0$, имеем

$$\nabla_i\varpi^k = \partial\varpi^k/\partial\eta^i = \partial\varpi^k/\partial x^i,$$

ковариантная производная совпадает с обычной производной компонент вектора по координате.

Ковариантные производные образуют компоненты тензора. В самом деле, пусть ζ^0, ζ^1, ζ^2, ζ^3 – новая, а η^0, η^1, η^2, η^3 – старая системы координат. Тогда

$$\partial\varpi/\partial\zeta^k = \partial\varpi/\partial\eta^i\cdot\partial\eta^i/\partial\zeta^k,$$

и видно, что, т. к. ϖ – инвариантный объект, то $\partial\varpi/\partial\eta^i$ преобразуются как ковариантные компоненты вектора.

Поэтому

$$T = \mathbf{Э}^i\, \partial\varpi/\partial\eta^i$$

представляет собой инвариантный объект; но по (4.35) и (4.36) мы имеем

$$T = \nabla_i \varpi^k\, \mathbf{Э}_k \mathbf{Э}^i\ ,$$

т. е. T является тензором второго ранга, смешанными компонентами которого являются ковариантные производные $\nabla_i \varpi^k$. Заметим, что производные $\partial\varpi^k/\partial\eta^i$ не являются компонентами тензора. Действительно, если под знак производной $\partial/\partial\eta^i$ вместо ϖ^k подставить их выражение в новой системе координат

$$\varpi^k = \varpi'^j \cdot \partial\eta^k/\partial\zeta^j,$$

то по η^i нужно будет дифференцировать и $\partial\eta^k/\partial\zeta^j$, и мы не получим тензорного закона преобразования для $\partial\varpi^k/\partial\eta^i$. Из определения ковариантной производной видно, что ковариантные производные от скаляра φ совпадают с обычными производными

$$\nabla_i\varphi = \partial\varphi\ /\partial\eta^i \tag{4.37}$$

и определяют вектор, который является вектором-градиентом скалярного поля φ.

Определим теперь ковариантную производную контравариантных компонент тензора. Возьмем для конкретности тензор второго ранга $H = H^{jk}\, \mathbf{Э}_j \mathbf{Э}_k$ и проведем вычисление следующим образом:

$$\partial H/\partial\eta^i = \partial H^{jk}/\partial\eta^i \cdot \mathbf{Э}_j\mathbf{Э}_k + H^{jk}\, \partial\mathbf{Э}_j/\partial\eta^i\, \mathbf{Э}_k + H^{jk}\, \mathbf{Э}_j \cdot \partial\mathbf{Э}_k/\partial\eta^i =$$
$$= \partial H^{jk}/\partial\eta^i\, \mathbf{Э}_j\mathbf{Э}_k + H^{jk}\Gamma^l_{ji}\, \mathbf{Э}_l \mathbf{Э}_k + H^{jk}\, \mathbf{Э}_j\, \Gamma^l_{ki}\, \mathbf{Э}_l\ .$$

Во второй сумме поменяем обозначения индексов суммирования l и j, а в третьей l и k, тогда получим

$$\partial H/\partial\eta^i = (\partial H^{jk}/\partial\eta^i + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li})\, \mathbf{Э}_j \mathbf{Э}_k = \nabla_i H^{jk}\, \mathbf{Э}_j \mathbf{Э}_k\ ,$$

где по определению

$$\nabla_i H^{jk} = \partial H^{jk}/\partial\eta^i + H^{lk}\Gamma^j_{li} + H^{jl}\Gamma^k_{li}$$

– называется ковариантной производной контравариантных компонент тензора второго ранга H. Легко видеть, что в связи с тензором второго ранга H можно ввести тензоры третьего ранга по формулам

$$T_1 = \partial H/\partial\eta^i\, \mathbf{Э}^i = \nabla_i H^{jk}\, \mathbf{Э}_j \mathbf{Э}_k \mathbf{Э}^i\ ,$$

или

$$T_2 = \nabla_i H^{jk}\, Э^i Э_j Э_k\ ,$$

или

$$T_3 = \nabla_i\, H^{jk}\, Э_j Э^i Э_k.$$

Очевидно, что тензоры T_1, T_2, T_3 вообще различны. Аналогично можно построить ковариантную производную от контравариантных компонент тензоров любого ранга. Из определения ковариантной производной (ее линейности по компонентам тензора) ясно, что ковариантная производная от суммы контравариантных компонент равна сумме ковариантных производных:

$$\nabla_i\,(\nu^k + \varpi^k) = \nabla_i \nu^k + \nabla_i \varpi^k. \tag{4.37a}$$

Покажем, что правило дифференцирования произведений в ковариантном смысле совпадает с правилом дифференцирования произведений в обычном смысле. Пусть требуется вычислить $\nabla_i\,(\nu^j\, \varpi^k)$. Для этого необходимо воспользоваться правилом ковариантного дифференцирования контравариантных компонент тензора, так как произведения $\nu\varpi^k$, как известно, являются компонентами тензора второго ранга. Итак,

$$\nabla_i(\nu^j\,\varpi^k) = \partial(\nu^j\,\varpi^k)/\partial\eta^i + \nu^l\,\varpi^k\,\Gamma^j_{li} + \nu^j\,\varpi^l\,\Gamma^k_{li} = (\partial\nu^j/\partial\eta^i + \nu^l\,\Gamma^j_{li})\,\varpi^k + \nu^j(\partial\varpi^k/\partial\eta^i + \varpi^l\,\Gamma^k_{li}) =$$

$$=\varpi^k \nabla_i v^j + v^j \nabla_i \varpi^k,$$

что и доказывает требуемое утверждение. Совершенно аналогично будет дифференцироваться в ковариантном смысле произведение произвольного числа членов.

Рассмотрим вопрос о ковариантном дифференцировании в том случае, когда вектор задан не контравариантными, а ковариантными компонентами. Пусть $\varpi = \varpi_j Э^j$, и требуется вычислить $\partial\varpi/\partial\eta^i$. Тогда

$$\partial\varpi/\partial\eta^i = \boldsymbol{Э}^j \partial \varpi_j/\partial\eta^i + \varpi_j \partial \boldsymbol{Э}^j/\partial\eta^i . \tag{4.38}$$

Очевидно, $\partial\boldsymbol{Э}^j/\partial\eta^i$, так же как и $\partial\boldsymbol{Э}_j/\partial\eta^i$, будет вектором; разложим его по $\boldsymbol{Э}^k$. В случае евклидова пространства и в общем случае римановых пространств верна формула

$$\partial\boldsymbol{Э}^j/\partial\eta^i = -\Gamma^j_{ki}\, \boldsymbol{Э}^k , \tag{4.39}$$

где Γ^j_{ki} – введенные ранее коэффициенты связности. В евклидовом и римановом пространствах они называются также символами Кристоффеля. Для установления справедливости (4.39) возьмем скалярное произведение

$$\boldsymbol{Э}^j\cdot\boldsymbol{Э}_k = \delta^j_k \tag{4.40}$$

и продифференцируем это равенство, верное во всех точках пространства, по координате η^i :

$$(\partial\boldsymbol{Э}^j/\partial\eta^i)\, \boldsymbol{Э}_k + \boldsymbol{Э}^j\, (\Gamma^l_{ki}\, \boldsymbol{Э}_l) = 0.$$

В последней сумме отличен от нуля только тот член, в котором $l = j$; поэтому

$$(\partial\boldsymbol{Э}^j/\partial\eta^i)\ \boldsymbol{Э}_k = -\Gamma^j_{ki} .$$

Очевидно, что эта формула равносильна (4.39). Формула (4.38) с учетом (4.39) примет вид

$$\partial\varpi/\partial\eta^i = (\partial\varpi_j/\partial\eta^i)\ \boldsymbol{Э}^j - \varpi_j \Gamma^j_{ki} \boldsymbol{Э}^k.$$

После замены в последней сумме индексов суммирования j на k, а k на j получим

$$\partial\varpi/\partial\eta^i = (\partial\varpi_j/\partial\eta^i - \varpi_k \Gamma^k_{ji})\boldsymbol{Э}^j = \nabla_i \varpi_j \boldsymbol{Э}^j .$$

Выражение $\partial\varpi_j/\partial\eta^i - \varpi_k \Gamma^k_{ji}$ определяет ковариантную производную от ковариантных компонент вектора:

$$\nabla_i \varpi_j = \partial\varpi_j/\partial\eta^i - \varpi_k \Gamma^k_{ji} . \tag{4.41}$$

Аналогично можно ввести ковариантную производную от ковариантных компонент любого тензора.

Заметим, что $\nabla_i \varpi_j$ являются ковариантными, а $\nabla_i \varpi^j$ – смешанными компонентами одного и того же тензора второго ранга

$$T = (\partial\varpi_j/\partial\eta^i)\, \boldsymbol{Э}^j = \nabla_i \varpi_j \boldsymbol{Э}^j \boldsymbol{Э}^i = \nabla_i\varpi^j \boldsymbol{Э}_j \boldsymbol{Э}^i .$$

Отсюда следует, что компоненты метрических тензоров g_{ij} и g^{ij}, несмотря на то, что они зависят от η^0, η^1, η^2, η^3, должны вести себя по отношению к ковариантному дифференцированию как постоянные величины. Иначе говоря, не меняя результата, их можно вносить и выносить за знак ∇_i. Действительно, между $\nabla_i \varpi^j$ и $\nabla_i \varpi_k$, как между различными компонентами одного и того же тензора, существует связь:

$$\nabla_i\varpi^j = g^{jk} \nabla_i \varpi_k , \tag{4.42}$$

но

$$\varpi^j = g^{jk}\varpi_k \tag{4.42а}$$

и, следовательно:

$$\nabla_i (g^{jk} \varpi_k) = g^{jk} \nabla_i \varpi_k ,$$

то есть

$$\nabla_i g^{jk} = 0 . \tag{4.42б}$$

Аналогично получается

$$\nabla_i\, g_{jk} = 0, \tag{4.42в}$$

если вместо выражения (4.42) взять $\nabla_i \varpi_k = g_{kj}\nabla_i \varpi^j$, а вместо (4.42а) $\varpi_k = g_{kj}\varpi^j$.

4.3.4. Свойства символов Кристоффеля [12]

Он не осквернил чужую жену – это тот, кто не стал заниматься ремеслом другого.

Талмуд, Санедрин, 81а

Остановимся теперь на вопросе вычисления символов Кристоффеля в метрическом евклидовом пространстве и выясним свойства символов Кристоффеля. Заметим, что существуют более сложные пространства, чем евклидовы и римановы, в которых символы Кристоффеля не вычисляются, а задаются, и способ их задания входит в определение пространства.

Символы Кристоффеля не являются компонентами какого-либо тензора. Это видно, например, из того, что в одном и том же пространстве они в декартовой системе координат равны нулю, а в криволинейной системе отличны от нуля. Очевидно, что компоненты тензора таким свойством обладать не могут. В псевдоевклидовом пространстве символы Кристоффеля симметричны по нижним индексам:

$$\Gamma^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}.$$

Покажем это. В псевдоевклидовом пространстве всегда существует радиус-вектор $r(\eta^0,\eta^1,\eta^2,\eta^3)$ и $\text{Э}_j = \partial r/\partial\eta^j$, а

$$\partial \text{Э}_j/\partial\eta^k = \partial^2 r/(\partial\eta^k\,\partial\eta^j) = \partial^2 r/(\partial\eta^j\partial\eta^k) = \partial \text{Э}_k/\partial\eta^j, \tag{4.43}$$

откуда

$$\Gamma^i_{jk}\,\text{Э}_i = \Gamma^i_{kj}\,\text{Э}_i.$$

Дадим формулы для вычисления символов Кристоффеля по компонентам метрического тензора g. В римановом пространстве симметрия символов Кристоффеля по нижним индексам принимается по определению. Поэтому полученные ниже формулы (4.44) для Γ^i_{kj} верны также в римановом пространстве.

Возьмем соотношение

$$\partial g_{js}/\partial\eta^k = (\partial \text{Э}_j/\partial\eta^k)\,\text{Э}_s + (\partial \text{Э}_s/\partial\eta^k)\,\text{Э}_j$$

и из него получим

$$\partial g_{js}/\partial\eta^k - (\partial \text{Э}_s/\partial\eta^k)\ \text{Э}_j = \Gamma^l_{jk}\,\text{Э}_l\,\text{Э}_s = \Gamma^l_{jk}\,g_{ls},$$

и аналогично

$$\partial g_{ks}/\partial\eta^j - \partial \text{Э}_s/\partial\eta^j\cdot\text{Э}_k = \Gamma^l_{kj}\,\text{Э}_l\cdot\text{Э}_s = \Gamma^l_{kj}\,g_{ls}.$$

Сложив эти два равенства и воспользовавшись симметрией символов Кристоффеля по нижним индексам, с учетом равенства (4.43) и тем, что

$$(\partial \text{Э}_k/\partial\eta_s)\,\text{Э}_j + (\partial \text{Э}_j/\partial\eta^s)\,\text{Э}_k = \partial g_{jk}/\partial\eta^s$$

получим

$$\partial g_{js}/\partial\eta^k + \partial g_{ks}/\partial\eta^j - \partial g_{jk}/\partial\eta^s = 2\Gamma^l_{jk}\,g_{ls}.$$

Свернув последнее соотношение с ? g^{is}, получим требуемые формулы

$$\Gamma^i_{jk} = ?\ g^{is}(\partial g_{js}/\partial\eta^k + \partial g_{ks}/\partial\eta^j - \partial g_{jk}/\partial\eta^s). \tag{4.44}$$

Символы Кристоффеля Γ^k_{ij}, как известно, не являются компонентами какого-либо тензора, в трехмерном пространстве они образуют экстенсив из двадцати семи величин. Символы Кристоффеля связаны с компонентами метрического тензора формулами (4.44), которые выше были получены для евклидова пространства и по определению справедливы для риманова пространства.

Обозначим символы Кристоффеля в системе координат η^i через Γ'^k_{ij}, а в системе координат ξ^i через Γ^k_{ij} и установим формулы преобразования символов Кристоффеля при переходе от системы координат ξ^i к системе η^i. Очевидно, что $\text{Э}'_i = \text{Э}_\alpha\,\partial\xi^\alpha/\partial\eta^i$; продифференцировав это равенство по η^j и учитывая, что

$$\partial \text{Э}'_i/\partial\eta^j = \Gamma'^\alpha_{ij}\,\text{Э}'_\alpha, \qquad \partial \text{Э}_\alpha/\partial\xi^\beta = \Gamma^\omega_{\alpha\beta}\,\text{Э}_\omega = \Gamma^\omega_{\alpha\beta}\,\partial\eta^\gamma/\partial\xi^\omega\,\text{Э}'_\gamma,$$

так как $\boldsymbol{Э}_\omega = \partial\eta^\gamma/\partial\xi^\omega\, \boldsymbol{Э}'_\gamma$, получим

$$\Gamma'^\alpha_{ij}\boldsymbol{Э}'_\alpha = [\Gamma^\omega_{\alpha\beta}\cdot\partial\eta^\gamma/\partial\xi^\omega\cdot\partial\xi^\alpha/\partial\eta^i\cdot\partial\xi^\beta/\partial\eta^j + \partial^2\xi^\omega/(\partial\eta^i\,\partial\eta^j)\cdot\partial\eta^\gamma/\partial\xi^\omega]\,\boldsymbol{Э}'_\gamma\,.$$

Умножив обе части этого равенства скалярно на $\boldsymbol{Э}'^\gamma$, будем иметь искомые формулы

$$\Gamma'^\gamma_{ij} = (\Gamma^\omega_{\alpha\beta}\,\partial\xi^\alpha/\partial\eta^i\;\;\partial\xi^\beta/\partial\eta^j + \partial^2\xi^\omega/\partial\eta^i\;\;\partial\eta^j)\,\partial\eta^\gamma/\partial\xi^\omega\,. \tag{4.45}$$

В евклидовом пространстве можно ввести единую для всего пространства декартову систему координат, в которой g_{ik} = const и, следовательно, все $\Gamma'^\gamma_{ij} = 0$ во всех точках пространства. В римановых пространствах дело обстоит не так. Напишем уравнения, определяющие систему координат, в которой все коэффициенты равны нулю. Det $\|\partial\eta^\nu/\partial\xi^\omega\| \neq 0$, поэтому согласно (4.45) все Γ'^γ_{ij} могут обратиться в нуль только при условии выполнения равенств

$$\Gamma^\omega_{\alpha\beta}\,\partial\xi^\alpha/\partial\eta^i\,\partial\xi^\beta/\partial\eta^j + \partial^2\xi^\omega/(\partial\eta^i\partial\eta^j) = 0\,, \tag{4.46}$$

где ω, i , j = 0, 1, 2, 3 .

В римановом пространстве этим равенствам всегда можно удовлетворить в некоторой заданной точке, т. е. всегда можно ввести новые координаты η^i так, чтобы в заданной точке η^i_0, соответствующей точке ξ^i_0, все $\Gamma'^\gamma_{ij} = 0$. Для этого, очевидно, достаточно положить

$$\xi^\omega\;\xi^\omega_0 = \delta^\omega_s(\eta^s - \eta^s_0) - ?\;\;\Gamma_0{}^\omega_{\alpha\beta}(\eta^\alpha - \eta^\alpha_0) - (\eta^\beta - \eta^\beta_0) + \ldots$$

4.3.5. Условие евклидовости пространства [12]

Каждый обжигается об балдахин другого.
Бава Батра, 75а

Если потребовать, чтобы равенства (4.46) выполнялись во всем пространстве, т. е. потребовать, чтобы пространство было евклидовым (или псевдоевклидовым, или вообще когда можно ввести координаты x^s так, чтобы g_{ik} глобально обратились бы в постоянные величины), то эти равенства будут представлять собой систему дифференциальных уравнений для определения преобразования данной системы ξ^i в декартову систему η^i во всем пространстве. В общем случае эта система неинтегрируемая. Условие евклидовости или псевдоевклидовости пространства совпадает с условиями интегрируемости системы дифференциальных уравнений (4.46). Выпишем эти условия. Для этого продифференцируем (4.46) по η^k и исключим из полученного равенства вторые производные, будем иметь

$$(\partial\Gamma^\omega_{\alpha\beta}/\partial\xi^s - \Gamma^\omega_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\alpha s} - \Gamma^\omega_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta s})\,(\partial\xi^s/\partial\eta^k)(\partial\xi^\alpha/\partial\eta^i)(\partial\xi^\beta/\partial\eta^j) + \partial^3\xi^\omega/(\partial\eta^i\partial\eta^j\partial\eta^k) = 0.$$

Переставив индексы суммирования s и β и индексы k и j и воспользовавшись симметрией символов $\Gamma^\omega_{\alpha\beta}$ по нижним индексам, получим другие аналогичные равенства

$$(\partial\Gamma^\omega_{\alpha s}/\partial\xi^\beta - \Gamma^\omega_{\lambda s}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} - \Gamma^\omega_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\beta s})(\partial\xi^\beta/\partial\eta^j)\,(\partial\xi^\alpha/\partial\eta^i)(\,\partial\xi^s/\partial\eta^k) + \partial^3\xi^\omega/(\partial\eta^i\,\partial\eta^k\partial\eta^j) = 0\,.$$

Вычитанием соответствующих равенств исключим третьи производные. Воспользовавшись еще тем, что детерминант преобразования от ξ^i к η^i должен быть отличным от нуля, получим необходимые и достаточные условия интегрируемости системы (4.46) в следующем виде:

$$R^\omega_{\beta s\alpha} = \partial\Gamma^\omega_{\alpha\beta}/\partial\xi^s - \partial\Gamma^\omega_{\alpha s}/\partial\xi^\beta + \Gamma^\omega_{\lambda s}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{4.47}$$

Если пространство евклидово (или псевдоевклидово), то эти равенства должны выполняться в любой системе координат. Если пространство неевклидово и не псевдоевклидово, то равенства (4.47) не удовлетворяются. Для евклидова пространства тензор Римана – Кристоффеля тождественно равен нулю, и результат повторного ковариантного дифференцирования в евклидовом пространстве не зависит от порядка его выполнения. Чисто ковариантные компоненты тензора Римана – Кристоффеля имеют вид

$$R_{ij\mu\nu} = g_{\alpha\nu}R^{\alpha}{}_{ij\mu} = \partial\Gamma_{\nu\mu}/\partial\xi_j - \partial\Gamma_{\nu\mu j}/\partial\xi_i + g_{\alpha\omega}[\Gamma^{\omega}{}_{\mu j}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu i} - \Gamma^{\omega}{}_{\mu i}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu j}]\,, \tag{4.48}$$

где согласно (4.44)

$$\Gamma_{\alpha\nu j} = ?\ \ [\partial g_{\alpha\nu}/\partial\xi^{j} + \partial g_{j\nu}/\partial\xi^{\alpha} - \partial g_{\alpha j}/\partial\xi^{\nu}],$$

В любой заданной точке можно выбрать систему координат так, чтобы все $\Gamma_{\alpha\nu j} =\ 0$, однако производные от $\Gamma_{\alpha\nu j}$, если пространство неевклидово, отличны от нуля, поэтому для компонент тензора Римана – Кристоффеля в такой системе координат x^{i} всегда можно написать следующие формулы:

$$R_{ij\mu\nu} = ?\ \ [\partial^2 g_{\nu i}/\partial x^{j}\partial x^{\mu} + \partial^2 g_{\mu j}/\partial x^{i}\partial x^{\nu} - \partial^2 g_{\mu i}/\partial x^{j}\partial x^{\nu} - \partial^2 g_{\nu j}/\partial x^{i}\partial x^{\mu}]\,. \tag{4.49}$$

Из этих формул непосредственно вытекают следующие свойства симметрии, которые по свойствам тензорных преобразований выполняются в любых системах координат и в любой точке пространства:

$$\begin{gathered} R_{ij\mu\nu} = -R_{ji\mu\nu}\,,\quad R_{ii\mu\nu} = 0\,,\\ R_{ij\mu\nu} = -R_{ij\nu\mu}\,,\quad R_{ij\nu\nu} = 0\,,\\ R_{ij\mu\nu} = R_{\mu\nu ij}\,,\quad R_{ij\mu\nu} + R_{\mu ij\nu} + R_{j\mu i\nu} = 0\,. \end{gathered} \tag{4.50}$$

Отметим, что не все из отмеченных здесь свойств симметрии независимы между собой.

4.3.6. Уравнение совместности деформаций [12]

Грабитель, благословляя – хулит ВСЕВЫШНЕГО.
Теилим, 10:3

Тензор деформаций имеет 16 компонент, из которых в силу симметрии $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ различны только десять. При наличии перемещений $\varpi = \boldsymbol{u}$ эти десять компонент ε_{ij} по (3.89) выражаются в каждой данной точке через шестнадцать производных $\partial_j u_i$ и, следовательно, могут быть в данной точке протяженности произвольными числами. Но ε_{ij} не могут быть произвольными функциями точек пространства $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$, так как по тем же формулам (3.89) десять функций ε_{ij} от $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$ выражаются через производные только четырех функций u_i от $\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3$. Поэтому ε_{ij} должны удовлетворять определенным уравнениям, которые называются уравнениями совместности деформаций. Уравнения совместности должны существовать только тогда, когда вектор перемещения $\varpi = \boldsymbol{u}$ существует, т. е. тогда, когда как актуальное, так и исходное состояния сплошной среды принадлежат евклидову пространству. Компоненты тензора деформации определяются равенствами

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \mathfrak{g}_{\alpha\beta} - \overset{0}{g}_{\alpha\beta}\,.$$

При условии существования вектора перемещения ϖ обе квадратичные формы

$$ds^2 = \mathfrak{g}_{\alpha\beta}\,d\xi^{\alpha}d\xi^{\beta}\quad и\quad ds_0^2 = \overset{0}{g}_{\alpha\beta}\,d\xi^{\alpha}d\xi^{\beta}$$

определяют квадрат элемента длины в евклидовом пространстве. Поэтому тензоры Римана – Кристоффеля (4.48), составленные для фундаментальных тензоров $\mathfrak{g}_{\alpha\beta}$ и $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ должны обращаться в нуль. Это приводит к уравнениям

$$\overset{0}{R}_{ij\mu\nu} = 0\quad и\quad \mathfrak{R}_{ij\mu\nu} = 0\,. \tag{4.51}$$

На протяженность $\lambda_{m\div n}$-вакуума, находящуюся в актуальном состоянии, можно наложить геометрию, описываемую псевдоевклидовым пространством, так что $\mathfrak{g}_{ij}$ такие, что

$$\mathfrak{R}_{ij\mu\nu} \equiv 0\,. \tag{4.52}$$

Тогда, подставляя

$$\tilde{g}_{ij} = \overset{0}{g}_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

в тождество (4.52), получим уравнения

$$\tilde{R}_{ij\mu\nu} = 0 \,,$$

называемые уравнениями совместности деформаций.

Эти уравнения можно легко выписать в развернутом виде с помощью формул (4.48). В частности, если в исходном недеформированном состоянии протяженности вакуума выбрана прямолинейная, декартова (вообще не ортогональная) система координат, то $\dfrac{\partial \overset{0}{g}_{ij}}{\partial \xi^{j}} = 0$, поэтому уравнения совместности $\tilde{R}_{ij\mu\nu} = 0$ можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^{j} \partial \xi^{\mu}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^{i} \partial \xi^{\nu}} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^{j} \partial \xi^{\nu}} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^{i} \partial \xi^{\mu}}\right) - \tilde{g}_{\alpha\varpi}\left[G^{\varpi}_{\mu j} G^{\alpha}_{\nu i} - G^{\varpi}_{\mu i} G^{\alpha}_{\nu j}\right] = 0 \,, \qquad (4.53)$$

где

$$G_{\alpha\nu j} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\nu}}{\partial \xi^{j}} + \frac{\partial \varepsilon_{j\nu}}{\partial \xi^{\alpha}} - \frac{\partial \varepsilon_{\alpha j}}{\partial \xi^{\nu}} \,, \qquad (4.54)$$

а компоненты $\tilde{g}_{\alpha\varpi}$ определяются как элементы матрицы, обратной матрице с компонентами $\overset{0}{g}_{\alpha\varpi} - \varepsilon_{\alpha\varpi}$:

$$\left\| \tilde{g}^{\alpha\varpi} \right\| = \left\| \overset{0}{g}_{\alpha\varpi} - \varepsilon_{\alpha\varpi} \right\|^{-1} .$$

В случае бесконечно малых деформаций последним членом в уравнении совместности деформаций (4.53) можно пренебречь, в результате имеем

$$\partial^2 \varepsilon_{\nu i} / \partial \xi^{j} \partial \xi^{\mu} + \partial^2 \varepsilon_{\mu j} / \partial \xi^{i} \partial \xi^{\nu} - \partial^2 \varepsilon_{\mu i} / \partial \xi^{j} \partial \xi^{\nu} - \partial^2 \varepsilon_{\nu j} / \partial \xi^{i} \partial \xi^{\mu} = 0 \,. \qquad (4.55)$$

Это уравнение называют уравнением совместности Сен-Венана.

Итак, в том случае, когда между начальным (исходным) и рассматриваемым (актуальным) состояниями сплошной среды можно ввести вектор перемещения ϖ, должны выполняться уравнения совместности, и выражения для ε_{ij} через компоненты ϖ можно рассматривать как общее решение этих уравнений.

Уравнение (4.53) с учетом $\tilde{g}_{ij} = \overset{0}{g}_{ij} + \varepsilon_{ij}$ можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^{j} \partial \xi^{\mu}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^{i} \partial \xi^{\nu}} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^{j} \partial \xi^{\nu}} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^{i} \partial \xi^{\mu}}\right) - \varepsilon_{\alpha\varpi}\left[G^{\varpi}_{\mu j} G^{\alpha}_{\nu i} - G^{\varpi}_{\mu i} G^{\alpha}_{\nu j}\right] - \overset{0}{g}_{\alpha\varpi}\left[G^{\varpi}_{\mu j} G^{\alpha}_{\nu i} - G^{\varpi}_{\mu i} G^{\alpha}_{\nu j}\right] = 0 \,. \qquad (4.56)$$

При этом первые два члена этого уравнения образуют тензор

$$C_{ij\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu i}}{\partial \xi^{j} \partial \xi^{\mu}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu j}}{\partial \xi^{i} \partial \xi^{\nu}} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\mu i}}{\partial \xi^{j} \partial \xi^{\nu}} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{\nu j}}{\partial \xi^{i} \partial \xi^{\mu}}\right) - \varepsilon_{\alpha\varpi}\left[G^{\varpi}_{\mu j} G^{\alpha}_{\nu i} - G^{\varpi}_{\mu i} G^{\alpha}_{\nu j}\right], \qquad (4.57)$$

который будем называть тензором совместности деформаций.

4.3.7. Условие совместности деформаций 2 [17]

МЕНЯ иудеи и христиане называют Б-ГОМ, мусульмане АЛЛАХОМ, а ученые РЕАЛЬНОСТЬЮ.

Из откровения Георгию Рязанову

Ввиду важности полученного в п. 4.3.6 уравнения совместности деформаций приведем другой подход к выводу этого уравнения.

Пусть в занятой протяженностью $\lambda_{m\div n}$ -вакуума области V заданы функции компонент тензора деформаций ε_{ij} и требуется определить функции компонент вектора перемещений u_i, заданного выражением (3.85).

Частную производную от вектора перемещения $\partial u_i/\partial x^j = u_{i,j}$ можно разложить на симметричную и кососимметричную составляющие

$$2u_{i,j} = u_{(i,j)} + u_{[i,j]} = (u_{i,j} + u_{j,i}) + (u_{i,j} - u_{j,i}).$$

Симметричный тензор $u_{(i,j)}$ можно представить в виде тензора малых деформаций

$$\varepsilon_{ij}^* = (u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{4.58}$$

а кососимметричный – в виде тензора малых углов поворота

$$\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i}), \tag{4.59}$$

что

$$2u_{ij} = \varepsilon_{ij}^* + \omega_{ij}. \tag{4.60}$$

Все производные искомых функций u_i на основании равенства (4.60) определяются в зависимости от известных компонент тензора малых деформации ε_{ij}^* и компонент тензора малого поворота ω_{ij}. Последние, как легко показать, связаны с компонентами тензора малых деформаций дифференциальными зависимостями

$$\omega_{ij,k} = \varepsilon_{ik,j}^* - \varepsilon_{jk,i}^*. \tag{4.61}$$

Действительно, дифференцируя по x_k равенство (4.59), получим

$$\omega_{ij,k} = (u_{i,jk} - u_{j,ik}) = (u_{i,kj} - u_{j,ki}) + (u_{k,ij} - u_{k,ij}) = (u_{i,kj} + u_{k,ij}) - (u_{j,ki} + u_{k,ji}) = \varepsilon_{ik,j}^* - \varepsilon^*_{jk,i}.$$

Интегрируя уравнение (4.60) по любой кривой $M_0 M$, не выходящей из области V, получим

$$u_i = u_i^0 + \int_{M_0}^{M} \varepsilon_{ij} dx_i^* + \int_{M_0}^{M} \omega_{ij} dx_i^*, \tag{4.62}$$

где u_i^0 – перемещения точки $M_0(x_i^0)$, совпадающей с началом кривой интегрирования;

x_i^* – координаты текущей точки $M^*(x_i^*)$ кривой $M_0 M$.

Полагая

$$d\,x_i^* = -d(x_j - x_i^*),$$

где x_j – координаты фиксированной точки $M(x_j)$.

Последний интеграл в равенстве (4.62) вычислим по частям и учтем равенство (4.61):

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^{M} \omega_{ij} dx_i^* &= -\int_{M_0}^{M} \omega_{ij} d\left(x_j - x_i^*\right) = -\omega_{ij}\left(x_j - x_i^*\right)\Big|_{M_0}^{M} + \int_{M_0}^{M} \left(x_j - x_i^*\right)\omega_{ij,k} dx_k^* = \\ &= \omega_{ij}^0\left(x_j - x_i^0\right) + \int_{M_0}^{M} \left(x_j - x_i^*\right)\left(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i}\right) dx_k^*. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Подставим в равенство (4.62) значение интеграла (4.63), получим формулу Чезаро

$$u_i = u_i^0 + \omega_{ij}^0 (x_j - x_i^0) + \int_{M_0}^{M} [\varepsilon_{ik} + (x_j - x_i^*)(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})] dx_k^* , \qquad (4.64)$$

которая позволяет определить перемещения любой точки $M(x_j)$ тела по известным функциям ε_{ij}. Шесть постоянных u_i^0и ω_{ij}^0, входящих в формулу Чезаро, определяют произвольное бесконечно малое жесткое смещение тела как целого. Действительно, если во всех точках $M(x_j) \in V$ имеем $\varepsilon_{ij} = 0$, то на основании (4.64), совмещая ради простоты точку $M_0(x_i^0)$ с началом координат, получим выражение

$$u_i = u_i^0 + \omega_{ij}^0 x_j , \qquad (4.65)$$

определяющее жесткое смещение.

Таким образом, при заданных компонентах тензора деформации ε_{ij} перемещения u_i определяются в точности до произвольного бесконечно малого «жесткого смещения». Постоянные u_i^0 , ω_{ij}^0 находим из условий, вытекающих из способа закрепления участка среды. В случае незакрепленного участка среды перемещения определяются единственным образом, если потребовать, чтобы в некоторой точке, например совпадающей с началом координат, перемещения u_i^0 и углы поворота ω_k^0 в ее окрестности были равны нулю. Перемещения произвольной точки $M(x_i)$ среды должны быть функциями ее координат и не должны зависеть от пути интегрирования $M_0 M$. Поэтому подынтегральное выражение в формуле Чезаро должно быть полным дифференциалом, т. е. во всех точках $M^*(x_i^*)$ области V необходимо и достаточно соблюдение условий

$$[\varepsilon_{ik} + (x_j - x_j^*)(\varepsilon_{ik,j} - \varepsilon_{jk,i})]_{,l} = [\varepsilon_{il} + (x_j - x_j^*)(\varepsilon_{il,j} - \varepsilon_{jl,i})]_{,k} . \qquad (4.66)$$

Выполняя дифференцирование левой части равенства (4.66) по x_l^* и правой части по x_k^*, получим

$$\varepsilon_{ik,l} - (\varepsilon_{ik,l} - \varepsilon_{lk,i}) + (x_j - x_i^*)(\varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jk,il}) = \varepsilon_{il,k} - (\varepsilon_{il,k} - \varepsilon_{kl,i}) + (x_j - x_j^*)(\varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jl,ik}) ,$$

откуда вытекает уравнение

$$\varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} - \varepsilon_{il,jk} - \varepsilon_{jk,il} = 0 . \qquad (4.67)$$

Уравнение (4.67) определяет дополнительные зависимости между компонентами тензора деформации. Данные дифференциальные зависимости, как это следует из способа их получения, представляют собой необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений (4.62).

Легко обнаруживается, что выражение левой части (4.67), меняет знак, во-первых, при перестановке индексов i и j, а во-вторых, при перестановке индексов k и l. Поэтому оно тождественно обращается в нуль при $i = j$ и при $k = l$. Кроме того, это выражение остается без изменения при одновременной перестановке индексов: 1) i и k, j и l, 2) i и l, j и k, 3) i и j, k и l.

Тогда среди соотношений (4.67) не повторяющихся и не обращающихся тождественно в нуль, будет только шесть при следующих значениях индексов ($i\ j\ k\ l$): (1212), (2323), (3131), (1213), (2321), (3132). Эти шесть соотношений образуют две группы дифференциальных зависимостей между компонентами тензора деформации. Одну из зависимостей первой группы получим, положив $i = k = 1$, $j = l = 2$:

$$\partial^2 \varepsilon_{11} / \partial x^2{}_2 + \partial^2 \varepsilon_{22} / \partial x^2{}_1 - 2\partial^2 \varepsilon_{12} / (\partial x_1 \partial x_2) = 0 . \qquad (4.68)$$

Две другие зависимости этой группы получаются путем круговой перестановки индексов. Принимая $i = k = 1$, $j = 2$, $l = 3$, получим одну из зависимостей второй группы:

$$\partial^2 \varepsilon_{11} / (\partial x_2 \partial x_3) + \partial (\partial \varepsilon_{23} / \partial x_1 - \partial \varepsilon_{31} / \partial x_2 - \partial \varepsilon_{12} / \partial x_3) / \partial x_1 = 0. \qquad (4.69)$$

Выполняя круговую перестановку индексов, получим еще две зависимости второй группы. Необходимые и достаточные условия интегрируемости уравнений (4.62), выраженные дифференциальными зависимостями (4.67), получены исходя из предположения о непрерывности функций u_i. Поэтому зависимости (4.67) являются также условиями непрерывности псевдосреды, на которую накладывается континуальная геометрия.

Необходимость существования зависимостей между компонентами тензора деформации можно обосновать также геометрически. Предположим, что в начальном состоянии среды она мысленно разделена на элементарные параллелепипеды (исключая элементы у поверхности тела). Если эти параллелепипеды подвергнуть деформации при независимых между собой компонентах ε_{ij}, то из деформированных таким произвольным образом элементов не удается, естественно, сложить сплошную среду, какой она должна быть в действительности.

Между некоторыми элементами образуются зазоры, а для других из них не окажется достаточно места. Это и показывает, что компоненты тензора деформации не могут быть произвольными, а должны подчиняться установленным аналитическим путем зависимостям (4.67).

Шесть соотношений, вытекающих из зависимостей (4.67): три типа (4.68) и три типа (4.69), – называются условиями неразрывности или совместности деформаций. Впервые (в 1864г.) они были получены Сен-Венаном (1797–1886) и часто называются дифференциальными зависимостями Сен-Венана.

Для получения уравнений совместности деформаций в криволинейных координатах в уравнении (4.67) необходимо поменять обычные частные производные на ковариантные производные

$$\nabla_{jl}\,\varepsilon_{ik} + \nabla_{ik}\,\varepsilon_{jl} - \nabla_{jk}\,\varepsilon_{il} - \nabla_{il}\,\varepsilon_{jk} = 0. \tag{4.70}$$

В результате выполнения ковариантного дифференцирования получим [17]

$$\partial_{jl}\,\varepsilon_{ik} + \partial_{jk}\,\varepsilon_{jl} - \partial_{jk}\,\varepsilon_{il} - \partial_{il}\,\varepsilon_{jk} - \varepsilon_{\alpha\beta}(\Gamma^{\alpha}{}_{ik}\Gamma^{\beta}{}_{jl} - \Gamma^{\alpha}{}_{il}\Gamma^{\beta}{}_{jk}) + \Gamma^{\alpha}{}_{jl}G_{ik\alpha} + \Gamma^{\alpha}{}_{ik}G_{jl\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{jk}G_{il\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{il}G_{jk\alpha} = 0, \tag{4.71}$$

где $\Gamma^{\alpha}{}_{jl}$ – задаются выражениями (4.44);

$G_{ik\alpha}$ – задаются выражениями (4.54).

Подставив в (4.44) $g_{jl} = \varepsilon_{ik} + g'_{jl}$ (где g'_{jl} – метрический тензор исходного состояния среды) с учетом $\partial_j g'_{il} = 0$, приходим к результату, практически сходному с (4.53). Естественно считать уравнение совместности деформаций (4.53) более верным, чем (4.71), поскольку оно вытекает не из приближенных соотношений (4.60), характерных для малых деформаций, а из более глубоких принципов, не ограничивающих величину деформаций.