4.4. Теория четырехмерных напряжений

Б-Г не ТОТ, КТО Побеждает врагов,
а КТО Побеждает вражду.

В классической теории упругости после введения тензора деформаций вторым шагом, как правило, является введение тензора напряжений. Тензорное поле напряжений определяет распределение внутренних сил упругости, возникающих в атомистических телах в результате их деформации. Как определяется классический тензор 3-напряжений, можно найти в любом учебнике по теории упругости. Но для наших целей данное определение тензор 3-напряжений не подходит, т. к. для описания метрико-динамических свойств участков протяженности любого из $\lambda_{m \div n}$ -вакуумов, как выяснилось в гл. 3 и 4 настоящего исследования, необходим тензор 4-деформаций, учитывающий одновременно и плотности сил и интенсивности потоков, и потенциальную энергию деформаций. Кроме того, если мы хотим связать тензор 4-деформаций с силовыми и энергетическими характеристиками того же искривленно-подвижного участка протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума, то эти силовые характеристики также необходимо представить виде тензора 4-напряжений, т. к. количества компонент взаимосвязанных тензоров должны совпадать.

Помимо этого, принцип «близкого действия» сил упругости в атомистических средах, на основании которого в классической теории упругости вводится тензор 3-напряжений, достаточно обоснован из-за короткодействия сил межмолекулярных связей. В отношении же протяженности любого из $\lambda_{m \div n}$ -вакуумов, применение принципа близкодействия никоим образом не обосновано. Поэтому нам необходимо найти иной подход для определения тензора 4-напряжений.

Несмотря на то, что протяженность любого из $\lambda_{m \div n}$ -вакуумов значительно отличается от атомистических сред, в классической теории упругости вводится ряд ключевых понятий, остающихся полезными и в рамках теории «упругого» вакуума. Поэтому в начале напомним основные положения классической теории упругости, применимой для описания обычных, атомистических сред.

4.4.1. Классическое задание тензора напряжений [11]

В недеформированной атомистической среде расположение атомов или молекул соответствует состоянию его теплового равновесия. При этом все его части находятся друг с другом и в механическом равновесии. Это значит, что если выделить внутри какой-нибудь объем, то равнодействующая всех сил, действующих на этот объем со стороны других частей, равна нулю.

При деформировании же расположение молекул меняется, и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально в естественных условиях. В результате в нем возникают силы, стремящиеся вернуть тело в состояние равновесия. Эти возникающие при деформации внутренние силы называются внутренними напряжениями. Считается, что если тело не деформировано, то внутренние напряжения в нем отсутствуют.

Внутренние напряжения обуславливаются молекулярными силами, т. е. силами взаимодействия молекул тела друг с другом. Весьма существенным для теории упругости атомистических тел является то обстоятельство, что молекулярные силы обладают очень незначительным «радиусом действия». Их влияние простирается вокруг создающей их частицы лишь на расстоянии порядка межмолекулярных. Но в классической теории упругости, как в макроскопической теории, рассматриваются объемы, значительно превышающие расстояния между молекулами и атомами. Поэтому «радиус действия» молекулярных сил в теории упругости атомистических тел считается практически равным нулю. Можно сказать, что силы, обуславливающие внутренние напряжения атомистических тел, являются в классической теории упругости силами «близкодействующими», т. е. предающимися от каждой точки только к другим точкам из близлежащей с ней области. Отсюда следует, что силы, оказываемые на какую-нибудь часть тела со стороны окружающих ее частей, действуют только непосредственно через поверхность этой части. Необходимо сделать оговорку: сделанное выше утверждение несправедливо в тех случаях, когда деформирование тела сопровождается появлением в нем макроскопических электрических полей (пиро- и пьезоэлектрические тела).

Выделим в твердом атомистическом теле какой-нибудь объем и рассмотрим действующую на него суммарную силу. С одной стороны, эта суммарная сила равна сумме всех сил, действующих на каждый из элементов рассматриваемого объема, т. е. может быть представлена в виде объемного интеграла

$$\int F\, dV,$$

где F – сила, действующая на единицу объема тела, так что на элемент объема dV действует сила FdV. С другой стороны, силы, с которыми действуют друг на друга различные части самого рассматриваемого объема, не могут привести к появлению отличной от нуля суммарной равнодействующей силы, поскольку они по закону равенства действия и противодействия в сумме уничтожают друг друга. Поэтому искомую, полную силу можно рассматривать как сумму только тех сил, которые действуют на данный объем со стороны окружающих его частей тела. Но, согласно сказанному выше, эти силы действуют на рассматриваемый объем через его поверхность, и поэтому результирующая сила может быть представлена в виде суммы сил, действующих на каждый элемент поверхности объема, т. е. в виде некоторого интеграла по этой поверхности.

Таким образом, для любого объема тела каждая из трех компонент $\int F_i\, dV$ равнодействующей всех внутренних напряжений может быть преобразована в интеграл по поверхности этого объема. Как известно из векторного анализа, интеграл от скаляра по произвольному объему может быть преобразован в интеграл по поверхности только в том случае, если этот скаляр является дивергенцией некоторого вектора. В данном случае мы имеем дело с интегралом не от скаляра, а от вектора. Поэтому вектор F_i должен являться дивергенцией некоторого тензора второго ранга, т. е. иметь вид

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \tag{4.72}$$

Тогда сила, действующая на некоторый объем, может быть написана в виде интеграла по замкнутой поверхности, охватывающей данный объем[1]:

$$\int F_i dV = \int \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k , \tag{4.73}$$

где df_i – компоненты вектора $\boldsymbol{df}$ элемента поверхности, направленного, как всегда, по внешней нормали к поверхности[2].

Тензор σ_{ik} называется тензором 3-напряжений. Как видно из (4.73), $\sigma_{ik}\, df_k$ есть $\boldsymbol{i}$-я компонента силы, действующей на элемент поверхности df. Выбирая элементы поверхности в плоскостях x, y; y, z и x, z, находим, что компонента σ_{ik} тензора напряжений есть $\boldsymbol{i}$-я компонента силы, действующей на единицу поверхности, перпендикулярную к оси x_k. Так, на единичную площадку, перпендикулярную к оси x, действует нормальная к ней (направленная вдоль оси x) сила σ_{xx} и тангенциальные (направленные по осям y и z) силы σ_{yx} и σ_{zx} .

Необходимо здесь сделать следующее замечание по поводу знака силы $\sigma_{ik}\, df_k$. В (4.73) интеграл по поверхности представляет собой силу, действующую на ограниченный этой поверхностью объем атомистического тела со стороны окружающих его частей того же тела. Наоборот, сила, с которой этот объем действует сам на окружающую его поверхность, имеет обратный знак. Поэтому, например, сила, действующая со стороны внутренних напряжений на всю поверхность тела, есть

$$\oint \sigma_{ik} df_k ,$$

где интеграл берется по поверхности тела, а вектор $\boldsymbol{df}$ направлен по внешней нормали.

Определим момент сил, действующих на некоторый объем тела. Момент силы $\boldsymbol{F}$ можно, как известно, написать в виде антисимметричного тензора второго ранга с компонентами $F_i x_k - F_k x_i$, где x_i – координаты точки приложения силы. Момент силы F определяется как векторное произведение [Fr]; из векторного анализа известно, что

[1] Интеграл по замкнутой поверхности атомистического тела преобразуется в интеграл по охватываемому этой поверхностью объему путем замены элемента поверхности df_i оператором $dV\, \partial/\partial x_i$.

[2] Строго говоря, при определении полной силы, действующей на деформированный объем атомистического тела, интегрирование должно производиться не по старым координатам x_i, а по координатам x'_i точек деформированного тела. Соответственно этому и производные должны были бы браться по x'_i. Однако ввиду малости деформаций производные по x_i и x'_i отличаются друг от друга на величины высших порядков малости, и потому можно все дифференцирования производить по координатам x_i . В теории сильных 4-деформаций «упругого» вакуума данное допущение не применимо.

компоненты векторного произведения двух векторов составляют антисимметрический тензор второго ранга. Поэтому момент сил, действующих на элемент объема dV, есть $(F_i x_k - F_k x_i)dV$, а на весь объем действует момент сил

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV \,. \tag{4.74}$$

Как и полная сила, действующая на полный объем, момент этих сил тоже должен выражаться в виде интеграла по поверхности объема. Подставляя для F_i выражение (4.72), находим:

$$M_{ik} = \int \Big(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i\Big) dV = \int \frac{\partial(\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_i} dV - \int \Big(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l}\Big) dV \,.$$

Во втором члене замечаем, что производные от одной координаты до другой равны единице, если обе координаты одинаковы, или равны нулю, если координаты разные (три координаты являются независимыми переменными). Таким образом, $\dfrac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$, где δ_{kl} есть единичный тензор; при умножении на σ_{ik} он дает $\delta_{kl}\sigma_{il} = \sigma_{ik}$, $\delta_{il}\sigma_{kl} = \sigma_{ki}$. В первом же члене под интегралом стоит дивергенция некоторого тензора; этот интеграл можно преобразовать в интеграл по поверхности. В результате находим

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik}) dV \,.$$

Для того чтобы M_{ik} было выражено в виде интеграла только по поверхности, необходимо, чтобы второй член здесь тождественно исчезал, т. е. должно быть $(\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) = 0$, или

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \,. \tag{4.75}$$

Таким образом, мы приходим к существенному результату, что тензор напряжений является симметричным тензором. Момент сил, действующих на некоторый объем тела, может быть написан теперь в простом виде:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV = \oint (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i) df_l \,. \tag{4.76}$$

Легко написать тензор напряжений в случае равномерного всестороннего сжатия атомистического тела. При таком сжатии на каждую единицу поверхности тела действует одинаковое по величине давление, направленное везде по нормали к поверхности внутрь объема тела. Если обозначить это давление посредством p, то на элемент поверхности df_l действует сила $-pdf_l$. С другой стороны, эта сила, будучи выражена через тензор напряжений, должна иметь вид $\sigma_{ik}\, df_k$. Написав $-pdf_l$ в виде $\sigma_{ik}\, df_k$, мы видим, что тензор напряжений при равномерном всестороннем сжатии выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} \,. \tag{4.77}$$

Все отличные от нуля его компоненты равны просто давлению.

В общем случае произвольной деформации атомистических тел отличны от нуля также и недиагональные компоненты тензора напряжений. Это значит, что на каждый элемент поверхности внутри тела действует не только нормальная к нему сила, но также и тангенциальные, «скалывающие» напряжения, стремящиеся сдвинуть параллельные элементы поверхности относительно друг друга.

В равновесии силы внутренних напряжений должны взаимно компенсироваться в каждом элементе объема тела, т. е. должно быть $F_i = 0$. Таким образом, уравнения равновесия деформированного тела имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \,. \tag{4.78}$$

Если тело находится в поле тяжести, то должна исчезать сумма $\boldsymbol{F}+\rho\,\boldsymbol{g}$ сил внутренних напряжений и силы тяжести $\rho\,\boldsymbol{g}$, действующей на единицу объема тела (ρ – плотность массы[1], $\boldsymbol{g}$ – вектор ускорения свободного падения, направленный вертикально вниз); уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}+\rho g_i=0\,. \tag{4.79}$$

Что касается внешних сил, приложенных непосредственно к поверхности тела (которые и являются обычно источником деформации), то они входят в граничные условия к уравнениям равновесия. Пусть $\boldsymbol{P}$ есть внешняя сила, действующая на единицу площади поверхности тела, так что на элемент поверхности df действует сила $\boldsymbol{P}df$. В равновесии она должна компенсироваться силой $\sigma_{ik}\,df_k$, действующей на тот же элемент поверхности со стороны внутренних напряжений. Таким образом, должно быть

$$P_i\,df-\sigma_{ik}\,df_k=0\,. \tag{4.80}$$

Написав df_k в виде $df_k = n_k\,df$, где $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности, находим отсюда

$$\sigma_{ik}\,n_k=P_i\,.$$

Это и есть условие, которое должно выполняться на всей поверхности находящегося в равновесии атомистического тела.

4.4.2. Тензор 4-напряжений [9]

Обобщенный метод введения понятия тензора 4-напряжений (или, как его еще называют, тензора энергии-импульса) основан на работах ученых геттингенской школы Д. Гильберта, Ф. Клейна и Э. Нетер. В трудах этой школы был развит метод вариационного исчисления и найдена связь между дифференциальными законами сохранения и симметриями окружающей нас действительности (в частности, с изотропностью и однородностью пространства-времени).

Этот удивительный метод универсален, т. е. пригоден к любой естественной протяженности, в которой может распространяться свет.

Напомним, что в данной работе в понятие «свет» вкладываются не только электромагнитные волны видимого диапазона, но и вообще все электромагнитные и звуковые сигналы любых диапазонов длин волн. Если волновые возмущения переносят еще и некий смысл (информацию), то такой свет мы называем умным светом, или Светом, или Словом. Волновые возмущения могут быть различного качества: продольные, поперечные; прямые и обратные; с круговой, эллиптической и линейной поляризациями; с различными: амплитудной, фазовой и частотной модуляциями и т. д. Но все разновидности волновых сигналов обладают одним и тем же универсальным свойством: «луч (эйконал) любого волнового возмущения совпадает с геодезической линией, повторяющей ландшафт естественной протяженности». Геодезическая линия – это геометрическое понятие, обобщающее представления о прямой линии в евклидовом пространстве на случай пространств более общего вида. В дифференцируемых многообразиях с линейной связностью геодезическая линия – это кривая, вдоль которой касательный к ней вектор переносится параллельно. То, что луч света с определенной длиной волны совпадает с геодезической линией искривленной протяженности соответствующего слоя псевдоповерхности Естества, сближает «оптику» и геометрию. Данное обстоятельство позволяет говорить о геометро-оптике объектевизирующей различные протяженные слои псевдоповерхности Естества до такой степени, что можно говорить об их реальном существовании. Более того, наделяя протяженности «пустынных» слоев псевдоповерхности Естества урпруго-пластическими свойствами, мы опускаем представления об этих идеальных (т. е. искусственно выделенных) протяженностях до материализованной проявленности упруго-пластической псевдосреды. То есть геометро-оптика позволяет выделять «пустынные», но искривленные протяженности из единой сущности Естества и рассматривать эти протяженности как сплошные псевдосреды, наделенные упруго-пластическими свойствами. Локальные участки протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуумов можно полагать объективно существующими

[1] Строго говоря, плотность тела при его деформировании меняется. Учет этого изменения приводит, однако, в случае малых деформаций к величинам высших порядков малости и потому для нас не существен.

ровно на столько, на сколько может быть выявлена их форма и движение, и установлено какая упругая потенция и кинетическая энергия в них содержится. Все, что материалисты, в самом деле, хотят от $\lambda_{m \div n}$ -вакуумов – это как раз их потенциальная и кинетическая энергии. Оккультисты смотрят на вакуумы куда более глубже – им нужен их Разум. Это подобно тому, что тело живого человека может рассматриваться как механизм, содержащий в себе потенцию выполнять механическую работу. С другой стороны, человек – существо разумное, и эта разумная сущность содержит в себе куда более мощную потенцию. Кабола всячески уходит от телесных представлений. В Ней строжайше запрещены всякие воображаемые образы, создающие оболочки телесности. Она предпочитает апеллировать к Чистому РАЗУМУ. Через условные символы служения и формулы благословлений Кабола открывает пути пролития не телесной Благодати из Эйн Соф, Благословен ОН, Бесконечного Источника Мироздания. Благодать, исходящая из Эйн Соф, Благословен ОН, через открытые Богослужениями порталы, находит, однако, телесные воплощения. Что и прославляется как чудо Бытия.

Итак, Науке принадлежит только телесное, Оккультизму – телесно-разуумное, Каболе – только Разумное. Алсигна же говорит о сверхзадаче объединения всей совокупности учений в единое Знание. Потому если предметом исследования выбран один из вакуумов, то, как и для любого другого живого организма, должны быть исследованы его анатомия, физиология и психология. Некоторые участки вакуумов могут болеть и гнить, поэтому нужно развивать и патологию вакуумов. Другими словами, Алсигна призывает подходить к исследованию вакуумов с величайшей осторожностью как к узнаванию Живых Существ невероятного Могущества. Опто-геометрия призвана лишь к анатомическим исследованиям вакуумных протяженностей.

Необходимо, однако, все время помнить, что лучи света «вырисовывают» ландшафт только такого слоя псевдоповерхности Естества, размеры неровностей и искажений которого на несколько порядков больше длины несущей волны пробного светового сигнала.

Если, например, ландшафт исследуемого участка одного из слоев псевдоповерхности Естества представляет собой идеально «ровную» (т. е. неискаженную) трехмерную протяженность, то путь луча любого прямого волнового возмущения описывается интервалом

$$ds^{(-)\,2} = v_{\text{в}}^{2}\, dt^{2} - dx^{2} - dy^{2} - dz^{2} \tag{4.80а}$$

с сигнатурой (+ – – –), а обратного

$$ds^{(+)\,2} = -\, v_{\text{в}}^{2}\, dt^{2} + dx^{2} + dy^{2} + dz^{2} \tag{4.80б}$$

с сигнатурой (– + + +), где $v_{\text{в}}$ – скорость распространения несущей волны светового сигнала того или иного качества и диапазона. Для $\lambda_{m \div n}$ -вакуумов $v_{\text{в}} = c$.

В случае, когда световой сигнал с длиной волны $\lambda_{m \div n}$ (из диапазона $10^{m} \ldots 10^{n}$ см) распространяется по $\lambda_{m \div n}$ -слою псевдоповерхности Естества с искривлено-подвижным ландшафтом, интервалы (4.80а) и (4.80б) принимают более обобщенный вид: для прямой волны с сигнатурой (+ – – –):

$$ds^{(-)\,2} = g_{ij}^{(-)}\, dx^{i}\, dx^{j}; \tag{4.80в}$$

для обратной волны с сигнатурой (– + + +):

$$ds^{(+)\,2} = g_{ij}^{(+)}\, dx^{i}\, dx^{j}, \tag{4.80г}$$

где $dx^{0} = v_{\text{в}}\, dt$.

В дальнейшем нас будут интересовать вакуумные слои псевдоповерхности Естества, для которых $v_{\text{в}} = c$ и, соответственно, $dx^{0} = c\, dt$. При этом интервалы (4.80в) и (4.80г) лягут в основу плотности лагранжианов, позволяющих на основании обобщенных методов вариационного исчисления получить основные силовые и динамические характеристики исследуемых подвижно-деформированных участков $\lambda_{m \div n}$ -вакуумов.

Вариационные методы познания связаны с мирозданческим принципом «Высшей целесообразности», гласящим, что все сущности стремятся действовать в направлении наименьшего сопротивления, с наименьшими затратами энергии и времени, т. е. по кратчайшим из возможных путей и за кратчайшие промежутки времени. Именно этому принципу мы обязаны тем, что миры приходят в наилучшее состояние из возможного. Принципу «Высшей целесообразности», истекающему из принципа «Экономии Мышления», противостоит Беззаветный Альтруизм Всеобъемлющей Б-ЖЕСТВЕННОЙ Любви, Повергающей все чувства в крайний «Беспорядок». Если не было бы в мирах проявлений качеств Б-ЖЕСТВЕННОЙ Строгости (Гвуры), накладывающей ограничения на неудержимый Натиск Б-ЖЕСТВЕННОЙ Любви, то никакое Творение не смогло бы устоять. Ибо при появлении оно тут же было бы растерзано всепоглощающей ЛЮБОВЬЮ. Но через такой «Беспорядок» произрастают зачатки «Свободы Воли». В борьбе «Порядка» с «Беспорядком» происходит становление Рассудка, отличного от Качеств и Воли Порождающего НАЧАЛА, Истекающего из Грандиозного Исходного ИНТЕЛЛЕКТА Мироздания.

Далее в отношении элементов вариационного исчисления мы практически без изменений цитируем [9].

Любая физическая система, в том числе выделенный объем протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума, может быть заданна в виде интеграла по 4-пространству (пространству-времени)

$$S = \int \Lambda(q, \partial q/\partial x^i)\, dVdt = 1/c \int \Lambda d\Omega\,, \tag{4.81}$$

где $d\Omega = c\; dt\; dV$;

Λ – некоторая функция от величин q, определяющих состояние системы и их производных по координатам и времени; для краткости рассматривается одномерный случай, распространение данного подхода на случай четырех измерений тривиально.

Заметим, что интеграл по пространству $\int \Lambda\; dV$ есть функция Лагранжа системы, так что Λ можно рассматривать как «плотность» функции Лагранжа. Математическим выражением замкнутости системы является отсутствие явной зависимости Λ от x^i подобно тому, как функция Лагранжа для замкнутой механической системы не зависит явно от времени. Уравнения движения получаются согласно принципу наименьшего действия путем варьирования интеграла действия (4.81). Имеем (для краткости обозначим $q_{,i} \equiv \partial q/\partial x^i$):

$$\delta S = 1/c\int(\partial\Lambda/\partial q\;\delta q + \partial\Lambda/\partial q_{,i}\;\delta q_{,i})d\Omega\; = 1/c\int[\partial\Lambda/\partial q\;\delta q + \partial/\partial x^i\,(\partial\Lambda/\partial q_{,i}\;\delta q) - \delta q\;\partial/\partial x^i\,(\partial\Lambda/\partial q_{,i})]d\Omega = 0.$$

Второй член под интегралом, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает при интегрировании по всему пространству, и мы находим тогда следующие «уравнения движения»:

$$\partial/\partial x^i\,(\partial\Lambda/\partial q_{,i}) - \partial\Lambda/\partial q = 0, \tag{4.82}$$

(везде подразумевается суммирование по дважды повторяющемуся индексу i).

Дальнейший вывод аналогичен тому, который производится в механике для вывода закона сохранения энергии. Именно:

$$\partial\Lambda/\partial x^i = \partial\Lambda/\partial q\;\partial q/\partial x^i + \partial\Lambda/\partial q_{,k}\,\partial q_{,k}/\partial x^i\,. \tag{4.83}$$

Подставляя сюда (4.82) и замечая, что $q_{,k\,,i} = q_{,i,k}$, находим:

$$\partial\Lambda/\partial x^i = \partial/\partial x^k\,(\partial\Lambda/\partial q_{,k})\,q_{,i} + \partial\Lambda/\partial q_{,k}\,\partial q_{,i}/\partial x^k = \partial/\partial x^k\,(q_{,i}\;\partial\Lambda/\partial q_{,k}).$$

Заменив в левой стороне равенства

$$\partial\Lambda/\partial x^i = \delta^k{}_i\;\partial\Lambda/\partial x^k$$

и введя обозначение

$$T^k{}_i = q_{,i}\;\partial\Lambda/\partial q_{,k} - \delta^k{}_i\,\Lambda\,, \tag{4.84}$$

напишем полученное соотношение в виде

$$\partial T^k{}_i/\partial x^k = 0\,. \tag{4.85}$$

Если имеется не одна, а несколько величин $q^{(l)}$, то вместо (4.84) надо, очевидно, писать:

$$T_i^k = \sum_l \frac{q_{,i}^{(l)}\partial\Lambda}{\partial q_{,k}^{(l)}} - \delta_i^k\Lambda\,. \tag{4.86}$$

Уравнение (4.85) эквивалентно утверждению, что сохраняется вектор

$$P^i = \text{const}\int T^{ik}dS_k\,,$$

где dS_k – элемент четырехмерной гиперповерхности.

Этот вектор должен быть отождествлен с 4-импульсом системы. Постоянный множитель перед интегралом выбирается так, чтобы временная компонента P^0 в соответствии с прежним определением была равна энергии системы, деленной на c. Для этого замечаем, что

$$P^0 = \text{const}\int T^{0k}dS_k = \text{const}\int T^{00}dV\,,$$

где интегрирование проводится по всей гиперповерхности, перпендикулярной к оси x^0. С другой стороны, согласно (4.84), имеем:

$$T^{00} = \frac{\dot{q}\,\partial\Lambda}{\partial\dot{q}} - \Lambda \ ,$$

где $\dot{q} \equiv \dfrac{\partial q}{\partial t}$.

В соответствии с обычной формулой, связывающей энергию с функцией Лагранжа, эту величину надо рассматривать как плотность энергии, и поэтому $\int T^{00} dV$ есть полная энергия системы. Таким образом, надо положить const $=1/c$, и мы получаем окончательно для 4-импульса системы выражение

$$P^{i} = 1/c \int T^{ik} dS_k\,. \tag{4.87}$$

Тензор T^{ik} называется тензором энергии-импульса системы или, как выяснится ниже, тензором 4-напряжений. Необходимо заметить, что определение тензора T^{ik} по существу не однозначно. Действительно, если T^{ik} – тензор, определенный согласно (4.84), то и всякий другой тензор вида

$$T^{ik} + \partial\psi^{ikl}/\partial x^l, \qquad \psi^{ikl} = -\psi^{ilk}, \tag{4.88}$$

удовлетворяет уравнению сохранения (4.85), так как верно тождество

$$\partial^2\psi^{ikl}/\partial x^k\partial x^l = 0,$$

ввиду антисимметричности тензора ψ^{ikl} по индексам k, l. Полный 4-импульс (тензор 4-напряжений) системы при этом вообще не изменится, так как

$$\int\left(\frac{\partial\psi^{ikl}}{\partial x^l}\right)dS_k = \frac{1}{2}\int dS_k\left(dS_k\frac{\partial\psi^{ikl}}{\partial x^l} - dS_l\frac{\partial\psi^{ikl}}{\partial x^k}\right) = \frac{1}{2}\oint\psi^{ikl}df^{*}_{kl}\ ,$$

где интегрирование с правой стороны равенства производится по поверхности (обычной), «охватывающей» гиперповерхность, по которой производится интегрирование с левой стороны равенства. Эта поверхность находится, очевидно, на бесконечности трехмерного пространства, и, поскольку искажения некого участка вакуума на бесконечности сходят на нет, и этот интеграл равен нулю. Таким образом, 4-импульс (тензор 4-напряжений) системы является, как и следовало, однозначно определенной величиной.

Для однозначного же определения тензора T^{ik} можно воспользоваться требованием, чтобы тензор момента 4-импульса выражался через 4-импульс (4-напряжение) посредством выражения

$$M^{ik} = \int(x^i dP^k - x^k dP^i) = 1/c\int(x^i T^{kl} - x^k T^{il})\, dS_l\,, \tag{4.89}$$

т. е. так, чтобы его плотность выражалась через плотность импульса обычной формулой.

Легко найти, какому условию должен для этого удовлетворять тензор энергии-импульса (4-х напряжений). Закон сохранения момента может быть выражен, как мы уже знаем, равенством нулю дивергенции подынтегрального выражения в M^{ik}. Таким образом,

$$\partial(x^i T^{kl} - x^k T^{il})/\partial x^l = 0\,. \tag{4.90}$$

Замечая, что $\partial x^i/\partial x^l = \delta^i_l$ $\partial T^{kl}/\partial x^l = 0$, находим

$$\delta^i_l T^{kl} - \delta^k_l T^{il} = T^{ki} - T^{ik} = 0\,,$$

или

$$T^{ki} = T^{ik}, \tag{4.91}$$

т. е. тензор энергии-импульса (4-напряжений) должен быть симметричен. Заметим, что тензор T^{ik}, определенный по формуле (4.86), вообще говоря, не симметричен, но может быть сделан таковым заменой (4.88) с надлежащим образом выбранным ψ^{ikl}. В дальнейшем (в пункте 4.4.3) мы увидим, что существует способ непосредственного получения симметричного тензора T^{ik}.

Как уже упоминалось выше, если производить интегрирование в (4.87) по гиперплоскости x^0 = const, то P^i приобретает вид

$$P^i = 1/c \int T^{i0} dV, \qquad (4.92)$$

где интегрирование производится по всему пространству (трехмерному). Пространственные компоненты P^i образуют трехмерный вектор импульса системы, а временная компонента есть деленная на скорость света c ее энергия. Поэтому вектор с составляющими T^{10}/c, T^{20}/c, T^{30}/c можно назвать плотностью импульса, а величину

$$W = T^{00}$$

можно рассматривать как плотность энергии.

Для выяснения смысла остальных компонент T^{ik} напишем уравнения сохранения (4.85), отделив в них пространственные и временные производные:

$$1/c\ \partial T^{00}/\partial t + \partial T^{0\alpha}/\partial x^\alpha = 0\ ; \quad 1/c\ \partial T^{\alpha 0}/\partial t + \partial T^{\alpha\beta}/\partial x^\beta = 0\ . \qquad (4.93)$$

Проинтегрируем эти уравнения по некоторому объему пространства V. Из первого имеем:

$$1/c\ \partial/\partial t\ (\int T^{00} dV) + \int \partial T^{0\alpha}/\partial x^\alpha\, dV = 0$$

или, преобразуя второй интеграл по (трехмерной) теореме Гаусса

$$\frac{\partial}{\partial t}\int T^{00} dV = -c\oint T^{0\alpha} df_\alpha\ , \qquad (4.94)$$

где интеграл справа берется по поверхности, охватывающей объем V (df_x, df_y, df_z – компоненты трехмерного вектора элемента поверхности $\boldsymbol{df}$). В левой стороне равенства (4.94) стоит скорость изменения энергии, находящейся в объеме V. Отсюда видно, что выражение справа есть количество энергии, протекающей через границу этого объема, а вектор $\boldsymbol{S}$ с составляющими cT^{01}, cT^{02}, cT^{03} есть плотность этого потока – энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Таким образом, мы приходим к важному выводу о том, что требования релятивистской инвариантности, заключенные в тензорном характере величин T^{ik}, автоматически приводят к определенной связи между потоком энергии и импульсом: плотность потока энергии равна плотности импульса, умноженной на c^2. Из второго уравнения (4.93) аналогичным путем находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{1}{c} T^{\alpha 0} dV = -\oint T^{\alpha\beta} df_\beta\ . \qquad (4.95)$$

Слева стоит изменение импульса системы в объеме V в единицу времени; поэтому $\oint T^{\alpha\beta} df_\beta$ есть количество импульса, вытекающее за единицу времени из этого объема. Таким образом, компоненты $T^{\alpha\beta}$ тензора энергии-импульса составляют трехмерный тензор плотности потока импульса; обозначим его через $-\sigma_{\alpha\beta}$ (где $\sigma_{\alpha\beta}$ – введенный в предыдущем пункте тензор напряжений). Плотность потока энергии есть вектор; плотность же потока импульса, который сам по себе есть вектор, должна, очевидно, быть тензором (компонента $T^{\alpha\beta}$ этого тензора есть количество α - й компоненты импульса, протекающее в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную к оси x^β, что, по сути, и является определением напряженности (см. (4.72).

Выпишем таблицу, указывающую смысл всех компонент тензора энергии-импульса (или, как мы его иначе называем, тензора 4-напряжений):

$$T^{ik} = \begin{matrix} W & S_x & S_y & S_z \\ S_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{matrix}\ . \qquad (4.96)$$

В дальнейшем, учитывая специфику настоящей работы, будем называть тензор T^{ik} просто тензором 4-напряжений, при этом физический смысл его компонент остается тем же, что и в классической теории упругости.

4.4.3. Тензор 4-напряжений в криволинейных координатах [9]

В предыдущем параграфе было получено общее правило для вычисления тензора энергии-импульса (4-напряжений) любой физической системы, действие которой представлено в виде интеграла (4.81) по 4-пространству. В криволинейных координатах этот интеграл должен быть написан в виде

$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda\sqrt{-g}\,d\Omega \ , \tag{4.97}$$

где g – определитель метрического тензора.

В галилеевых координатах $g = -1$ и S переходит в ? $\int \Lambda\, dVdt$. Интегрирование производится по всей четырехмерной протяженности одной из сторон λ_{m-n} -вакуума.

Как уже было сказано, тензор энергии-импульса, определенный по формуле (4.86), не является, вообще говоря, симметричным, каким он должен быть. Для того чтобы сделать его симметричным, необходимо было прибавить к выражению (4.86) надлежащим образом подобранный член вида $\partial\psi_{ikl}/\partial x^l$, причем $\psi_{ikl} = \psi_{ilk}$.

Дадим теперь другой способ вычисления тензора 4-напряжений (энергии-импульса), обладающий тем преимуществом, что он сразу приводит к симметричному выражению [9].

Произведем в (4.97) преобразование от координат x^i к координатам $x'^i = x^i + \xi^i$, где ξ^i – малые величины. При этом преобразовании компоненты g^{ik} преобразуются согласно формулам

$$g'^{ik}(x'^l) = g^{lm}(x^l)\,\partial x'^i/\partial x^l\ \partial x'^k/\partial x^m = g^{lm}\,(\delta^i_l + \partial\xi^i/\partial x^l)\,(\delta^k_m + \partial\xi^k/\partial x^m) \approx$$
$$\approx g^{ik}(x^l) + g^{im}\,\partial\xi^k/\partial x^m + g^{kl}\,\partial\xi^i/\partial x^l .$$

Метрический тензор g'^{ik} является здесь функцией от x'^l, а тензор g^{ik} – функцией прежних координат x^l. Для того чтобы представить все члены в виде функций от одних и тех же переменных, разложим $g^{ik\prime}(x^l+\xi^l)$ по степеням ξ^l. Далее, пренебрегая членами высшего порядка по ξ^l, мы можем в членах, содержащих ξ^l, написать g^{ik} вместо $g^{ik\prime}$. Таким образом, находим:

$$g^{ik\prime}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \xi^l\,\partial g^{ik}/\partial x^l + g^{il}\,\partial\xi^k/\partial x^l + g^{kl}\,\partial\xi^i/\partial x^l .$$

Легко убедиться путем непосредственной проверки, что последние три члена справа могут быть написаны в виде суммы $\xi^{i;k} + \xi^{k;i}$ контравариантных производных от ξ_i. Таким образом, находим окончательное преобразование g^{ik} в виде

$$g^{ik\prime} = g^{ik} + \delta g^{ik}, \quad \delta g^{ik} = \xi^{i;k} + \xi^{k;i} . \tag{4.98}$$

Для ковариантных компонент имеем при этом:

$$g'_{ik} = g_{ik} + \delta g_{ik}, \quad \delta g_{ik} = -\xi_{i;k} - \xi_{k;i} . \tag{4.99}$$

(Так, чтобы с точностью до величин первого порядка малости соблюдалось условие $g_{il}'g^{kl\prime} = \delta^k_i$) [1].

Поскольку действие S есть скаляр, то при преобразовании координат оно не меняется. С другой стороны, изменение δS действия при преобразовании координат можно написать в следующем виде. Пусть, как и в предыдущем параграфе, q обозначают величины, определяющие ту физическую систему, к которой относится действие S. При преобразовании координат величины q меняются на δq. При вычислении δS можно, однако, не писать членов, связанных с изменениями q. Все эти члены все равно взаимно сокращаются в силу «уравнений движения» физической системы, поскольку эти уравнения как раз и получаются путем приравнивания нулю вариации S по величинам q. Поэтому достаточно написать только члены, связанные с изменением q_{ik}. Воспользовавшись, как обычно, теоремой Гаусса и полагая на границах интегрирования $\delta g^{ik} = 0$, находим δS в виде

[1] Отметим, что уравнения $\xi^{i;k} + \xi^{k;i} = 0$ определяют те инфинитезимальные преобразования координат, которые не меняют данной метрики. В литературе их часто называют уравнениями Киллинга.

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}}\delta g^{ik} + \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\delta\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}\right\}d\Omega = \frac{1}{c}\int\left\{\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}\right\}\delta g^{ik}d\Omega .$$

Введем теперь обозначение

$$\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik} = \frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} . \tag{4.100}$$

Тогда δS примет вид [2]

$$\delta S = \frac{1}{2}c\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega = -\frac{1}{2}c\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}\,d\Omega , \tag{4.101}$$

(Замечаем, что $g^{ik}\delta g_{lk} = -g_{lk}\,\delta g^{ik}$ и потому $T^{ik}\delta g_{ik} = -T_{ik}\,\delta g^{ik}$.) Подставляя сюда для δg^{ik} выражение (4.98), имеем, воспользовавшись симметрией тензора T_{ik}:

$$\delta S = \frac{1}{2}c\int T_{ik}\left(\xi^{i;k} + \xi^{k;i}\right)\sqrt{-g}\,d\Omega = \frac{1}{2}c\int T_{ik}\xi^{i;k}\sqrt{-g}\,d\Omega .$$

Далее преобразуем это выражение следующим образом:

$$\delta S = \frac{1}{c}\int\left(T_i^k\xi^i\right)_{;k}\sqrt{-g}\,d\Omega - \frac{1}{c}\int T_{i;k}^k\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega . \tag{4.102}$$

Первый интеграл может быть написан в виде [9]

$$\frac{1}{c}\int\frac{\partial\left(\sqrt{-g}T_i^k\xi^i\right)}{\partial x^k}d\Omega$$

и преобразован в интеграл по гиперповерхности. Поскольку на границах интегрирования ξ^i обращается в нуль, то этот интеграл исчезает. Таким образом, приравнивая δS нулю, находим

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int T_{i;k}^k\xi^i\sqrt{-g}\,d\Omega = 0 .$$

Ввиду произвольности ξ^i отсюда следует, что

$$\nabla_k T_i^k = T_{i;k}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial(T_i^k\sqrt{-g})}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}T^{kl} = 0 . \tag{4.103}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (4.85) $\partial T_{ik}/\partial x^k = 0$, имевшим место в галилеевых координатах, мы видим, что тензор T_{ik} , определяемый формулой (4.100), должен быть отождествлен с тензором энергии-импульса (или 4-напряжений) для случая криволинейных координат, по крайней мере, с точностью до постоянного множителя.

[2] В рассматриваемом случае десять величин δg_{ik} не независимы, так как являются результатом преобразования координат, которых имеется всего четыре. Поэтому из равенства δS нулю отнюдь не следует, что $T_{ik} = 0$.