5.9. Алсигна и теория групп (*)

В XVI веке Парацельс предрекал: «Б-Г Допустит совершить открытие величайшей важности; оно должно быть сокрыто до пришествия художника Элиаса» [100].

В теории групп абстрактная группа G определяется как множество элементов $a, b, c, \ldots$, для которых задан закон композиции и «умножения» так, что «произведение» ab любых двух элементов данной группы вполне определено и удовлетворяет следующим условиям:

1) если a и b - элементы множества, то и $ab = c$ также принадлежит этому множеству;
2) умножение ассоциативно, т. е. $a(bc) = (ab)c$;
3) множество содержит элемент e, называемый единицей, такой, что $ae = ea = a$ для любого элемента a из множества;
4) если элемент a принадлежит множеству, то существует элемент b такой, что $ab = ba = e$. Элемент b называется обратным для элемента a и обозначается $b = a^{-1}$.

Хотя групповую операцию часто называют «умножением», из этого отнюдь не следует, что эта операция является обычным умножением. Множество рациональных чисел (за исключением нуля) образует группу по обычному умножению. Совокупность целых чисел (положительных, отрицательных и нуля) образует группу, если групповой операцией служит обычное сложение. Даже в этих примерах пользуются не абстрактной группой, а каким-либо конкретным примером («реализацией») абстрактной группы. Структура абстрактной группы определяется заданием результата «умножения» каждой упорядоченной пары элементов либо путем перечисления, либо же путем указания функционального закона, без какой бы то ни было конкретизации природы элементов.

Эварист Галуа

Эварист Галуа (1811 – 1832) прожил очень короткую, но насыщенную страданиями и революционной борьбой жизнь. Его гений вспыхнул, чтобы осветить путь грядущим поколениям, и угас под гнетом темных реакционных сил. Его молниеносный ум настолько опережал его поколение, что он так и не был при жизни принят математическим сообществом.

В ночь пред роковой дуэлью, спровоцированной, по мнению его друзей и соратников по борьбе против Людовика XVIII, правительственным агентом, Галуа успел конспективно написать мемуар, где он изложил свои основные достижения по решению алгебраических уравнений пятой степени вида $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$.

В день гибели на дуэли Эваристу Галуа было всего 21 год. Только через 14 лет после его трагической смерти копия его предсмертного мемуара попал в руки Жозефа Лиувилля. Он ощутил в это рукописи искру гения и потратил несколько месяцев чтобы разобраться в этих заметках. Результаты оказались ошеломляющие, этот труд стал одним из шедевров математики. При решении уравнений пятой степени рассуждения Галуа концентрировались на так называемой теории групп – идеи, которую Галуа превратил в мощное оружие, способное решать ранее не разрешимые проблемы.

Эварист Галуа (1811 – 1832) прожил очень короткую, но насыщенную страданиями и революционной борьбой жизнь. Его гений вспыхнул, чтобы освтить путь грядущим покалениям, и угас под гнетом темных реакционных сил. Его молниеносный ум настолько опережал его покаление, что он так и не был при жизни принят математическим сообществом.

В ночь пред роковой дуэлью, справоцированной, по мнению его друзей и саратников по борьбе против Людовика XVIII, правителственным агентом, Галуа успел конспективно написать мемуар, где он изложил свои основные достижения по решению алгебраических уравнений пятой степени вида $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$.

В день гибели на дуэле Эваристу Галуа было всего 21 год. Только через 14 лет после его трагической смерти копия его предсмертного мемуара попал в руки Жозефа Лиувилля. Он ощутил в это рукописи искру гения и потратил несколько месяцев чтобы разобраться в этих заметках. Результаты оказались ошеломляющие этот труд стал одним из шедевров математики. Решая уравнения пятой степени рассуждения Галуа концентрировались на так называемой теории групп – идеи которую Галуа превратил в мощное оружие, способноне решать ранее не разрешимые проблемы.

Говорят, что два элемента a и b группы коммутируют друг с другом, если $ab = ba$, т. е. если их произведение не зависит от порядка сомножителей. Из аксиом группы мы видим, что единичный элемент e коммутирует со всеми элементами группы. Если все элементы некоторой группы коммутируют друг с другом, то говорят, что эта группа коммутативная, или абелева. Для абелевых групп в качестве символа для обозначения групповой операции используем знак ⊗.

Покажем, что 16 сигнатур, входящих в ранжиры (5.80) и (5.81)

$$\begin{array}{c} (+\ +\ +\ +) \\ (-\ -\ -\ +) \\ (+\ -\ -\ +) \\ (-\ -\ +\ -) \\ (+\ +\ -\ -) \\ (-\ +\ -\ -) \\ (+\ -\ +\ -) \\ (+\ -\ -\ -) \end{array} \qquad (5.160) \qquad \begin{array}{c} (-\ -\ -\ -) \\ (+\ +\ +\ -) \\ (-\ +\ +\ -) \\ (+\ +\ -\ +) \\ (-\ -\ +\ +) \\ (+\ -\ +\ +) \\ (-\ +\ -\ +) \\ (-\ +\ +\ +) \end{array} \qquad (5.161)$$

не только образуют антисимметричную матрицу (5.75), но и могут рассматриваться как элементы абстрактной группы G_s по групповой операции – «ранжирное умножение». Под ранжирным умножением подразумевается умножение двух одинаково расположенных в сигнатурах знака по обычным правилам:

$$\begin{array}{l} + \otimes + = + \ ; \\ + \otimes - = - \ ; \\ - \otimes - = + \ . \end{array} \qquad (5.162)$$

Например:

$$\begin{array}{c} (-\ -\ -\ +) \\ (+\ -\ -\ +) \\ \hline (-\ +\ +\ +)_{\otimes} \end{array} \qquad \begin{array}{c} (+\ +\ +\ -) \\ (-\ +\ +\ -) \\ \hline (-\ +\ +\ +)_{\otimes} \end{array} \qquad (5.163)$$

$$\begin{array}{c} (-\ -\ +\ -) \\ (+\ +\ -\ -) \\ \hline (-\ -\ -\ +)_{\otimes} \end{array} \qquad \begin{array}{c} (-\ +\ -\ +) \\ (-\ -\ +\ +) \\ \hline (+\ -\ -\ +)_{\otimes} \end{array}$$

В результате таким образом определенной операции ранжирного умножения вновь получаются элементы этой же группы, при этом выполняется условие 1, приведенное в начале данного пункта.

Условие 2 также выполняется, т. к. при перестановке элементов множества G_s местами результат ранжирного умножения не меняется

$$\begin{array}{c} (+\ +\ -\ -) \\ (-\ +\ -\ -) \\ (+\ -\ +\ -) \\ \hline (-\ -\ -\ +)_{\otimes} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} (+\ -\ +\ -) \\ (+\ +\ -\ -) \\ (-\ +\ -\ -) \\ \hline (-\ -\ +\ -)_{\otimes} \end{array} \qquad (5.164)$$

Условие 3 выполняется, если за единичный элемент принять сигнатуру (+ + + +), при ранжирном умножении данного элемента на любую другую сигнатуру из G_s она остается неизменной, например:

$$\begin{array}{c} (-\ -\ +\ -) \\ (+\ +\ +\ +) \\ \hline (-\ -\ +\ -)_{\otimes} \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{c} (+\ +\ +\ +) \\ (-\ -\ +\ +) \\ \hline (-\ -\ +\ +)_{\otimes} \end{array} \qquad (5.165)$$

Результат действия ранжирного умножения не зависит от последовательности умножения строки на строку, т. е. для любой пары сигнатур имеет место равенство типа

$$\begin{array}{c} (-\ -\ -\ +) \\ (+\ -\ -\ +) \\ \hline (-\ +\ +\ +)_{\otimes} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{c} (+\ -\ -\ +) \\ (-\ -\ -\ +) \\ \hline (-\ +\ -\ +)_{\otimes} \end{array} \qquad (5.166)$$

т. е. каждый элемент множества G_s по данной групповой операции коммутирует с любым другим элементом данной группы. Итак, множество элементов G_s удовлетворяет всем условиям, определяющим абстрактную абелеву группу.

Придерживаясь правил (5.162), можно ранжирно перемножать сколько угодно элементов абстрактной абелевой группы G_s , например:

$$\begin{array}{c} (+\ +\ -\ -) \\ (-\ +\ -\ -) \\ (+\ -\ +\ -) \\ (-\ +\ -\ +) \\ (-\ -\ +\ -) \\ \hline (-\ +\ -\ +)_{\otimes} \end{array} \qquad \begin{array}{c} (-\ -\ +\ +) \\ (+\ -\ +\ +) \\ (+\ -\ +\ -) \\ (-\ +\ +\ +) \\ \hline (+\ +\ +\ -)_{\otimes} \end{array} \tag{5.167}$$

Интересно, что $\otimes$ – ранжирное умножение всех сигнатур в ранжирах (5.160) и (5.161) приводит к одному и тому же результату

$$\begin{array}{c} (+\ +\ +\ +) \\ (-\ -\ -\ +) \\ (+\ -\ -\ +) \\ (-\ -\ +\ -) \\ (+\ +\ -\ -) \\ (-\ +\ -\ -) \\ (+\ -\ +\ -) \\ (+\ -\ -\ -) \\ \hline (-\ -\ -\ -)_{\otimes} \end{array} \quad (5.168) \qquad \begin{array}{c} (-\ -\ -\ -) \\ (+\ +\ +\ -) \\ (-\ +\ +\ -) \\ (+\ +\ -\ +) \\ (-\ -\ +\ +) \\ (+\ -\ +\ +) \\ (-\ +\ -\ +) \\ (-\ +\ +\ +) \\ \hline (-\ -\ -\ -)_{\otimes} \end{array} \quad (5.169)$$

Не менее интересен результат ранжирного умножения при удалении из ранжира (5.168) сигнатуры (+ – – –), а из (5.169) сигнатуры (– + + +)

$$\begin{array}{c} (+\ +\ +\ +) \\ (-\ -\ -\ +) \\ (+\ -\ -\ +) \\ (-\ -\ +\ -) \\ (+\ +\ -\ -) \\ (-\ +\ -\ -) \\ (+\ -\ +\ -) \\ \hline (-\ +\ +\ +)_{\otimes} \end{array} \quad (5.170) \qquad \begin{array}{c} (-\ -\ -\ -) \\ (+\ +\ +\ -) \\ (-\ +\ +\ -) \\ (+\ +\ -\ +) \\ (-\ -\ +\ +) \\ (+\ -\ +\ +) \\ (-\ +\ -\ +) \\ \hline (+\ -\ -\ -)_{\otimes} \end{array} \quad (5.171)$$

Оказывается, что ранжирное умножение приводит к противоположным результатам, чем ранжирное сложение (5.80) и (5.81).

Интересно, что любую пару взаимно противоположных сигнатур можно представить через ранжирную сумму других сигнатур, например:

$$\begin{array}{c} (-\ -\ -\ -) \\ (+\ +\ -\ +) \\ (+\ -\ +\ +) \\ (-\ +\ +\ -) \\ (+\ +\ -\ -) \\ (-\ -\ -\ +) \\ (-\ +\ +\ +) \\ \hline (-\ +\ -\ +)\,\underline{\text{сумма}} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} (+\ +\ +\ +) \\ (-\ -\ +\ -) \\ (-\ +\ -\ -) \\ (+\ -\ -\ +) \\ (-\ -\ +\ +) \\ (+\ +\ +\ -) \\ (+\ -\ -\ -) \\ \hline (+\ -\ +\ -)\ \underline{\text{сумма.}} \end{array}$$

5.9.1. Мультипликативная модель (*)

Ранжирные умножения (5.170) и (5.171) приводят к сигнатурам (– + + +) и (+ – – –). Это наводит на мысль, что возможно не только аддитивное разложение компонент метрических тензоров прямого и обратного интервалов (5.1) и (5.2) на 7 аддитивных составляющих (5.14) и (5.15). Но, по всей видимости, может иметь место и их мультипликативное разложение на 7 сомножителей $p_{ij}^{(m)}$ и $k_{ij}^{(m)}$ (где m = 1, 2, 3,…, 7):

$$<n_{ij}^{(-)}> = p_{ij}^{(1)} \times p_{ij}^{(2)} \times p_{ij}^{(3)} \times p_{ij}^{(4)} \times p_{ij}^{(5)} \times p_{ij}^{(6)} \times p_{ij}^{(7)} = \prod_{m=1}^{7} p_{ij}^{(m)} \qquad (5.171а)$$

и

$$<n_{ij}^{(+)}> = k_{ij}^{(1)} \times k_{ij}^{(2)} \times k_{ij}^{(3)} \times k_{ij}^{(4)} \times k_{ij}^{(5)} \times k_{ij}^{(6)} \times k_{ij}^{(7)} = \prod_{m=1}^{7} k_{ij}^{(m)}, \qquad (5.171б)$$

где матрицам $p_{ij}^{(m)}$ соответствуют сигнатуры из мультипликативного ранжира (5.170), а матрицам $k_{ij}^{(m)}$ – из мультипликативного ранжира (5.171)

$$\begin{array}{ll} p_{ij}^{(1)} & (+\ +\ +\ +) \\ p_{ij}^{(2)} & (-\ -\ -\ +) \\ p_{ij}^{(3)} & (+\ -\ -\ +) \\ p_{ij}^{(4)} & (-\ -\ +\ -) \\ p_{ij}^{(5)} & (+\ +\ -\ -) \\ p_{ij}^{(6)} & (-\ +\ -\ -) \\ \underline{p_{ij}^{(7)}} & \underline{(+\ -\ +\ -)} \\ <n_{ij}^{(+)}> & \underline{(-\ +\ +\ +)\ \text{произвед.}} \end{array} \qquad (5.171в)$$

$$\begin{array}{ll} k_{ij}^{(1)} & (-\ -\ -\ -) \\ k_{ij}^{(2)} & (+\ +\ +\ -) \\ k_{ij}^{(3)} & (-\ +\ +\ -) \\ k_{ij}^{(4)} & (+\ +\ -\ +) \\ k_{ij}^{(5)} & (-\ -\ +\ +) \\ k_{ij}^{(6)} & (+\ -\ +\ +) \\ \underline{k_{ij}^{(7)}} & \underline{(-\ +\ -\ +)} \\ <n_{ij}^{(-)}> & \underline{(+\ -\ -\ -)\ \text{произвед.}} \end{array} \qquad (5.171г)$$

Между аддитивным разложением (5.14), (5.15)

$$<n_{ij}^{(-)}> = b_{ij}^{(1)} + b_{ij}^{(2)} + b_{ij}^{(3)} + b_{ij}^{(4)} + b_{ij}^{(5)} + b_{ij}^{(6)} + b_{ij}^{(7)} = \sum b_{ij}^{(m)} \qquad (5.14)$$

$$<n_{ij}^{(+)}> = a_{ij}^{(1)} + a_{ij}^{(2)} + a_{ij}^{(3)} + a_{ij}^{(4)} + a_{ij}^{(5)} + a_{ij}^{(6)} + a_{ij}^{(7)} = \sum a_{ij}^{(m)}. \qquad (5.15)$$

и мультипликативным разложением (5.171а) (5.171б) есть ощутимая разница. В аддитивной модели сигнатурного разложения слагаемые $a_{ij}^{(m)}$ и $b_{ij}^{(m)}$ могут мало отличаться друг от друга, за счет их знакопеременности (см. (5.19) и (5.20)). Например, подставляя в (5.14) для $<n_{00}^{(+)}> = 1$ числовые значения $a_{00}^{(1)} = 0,3$, $a_{00}^{(2)} = 1,5$, $a_{00}^{(3)} = -0,4$, $a_{00}^{(4)} = 1,8$, $a_{00}^{(5)} = -2$, $a_{00}^{(6)} = -0,3$, $a_{00}^{(1)} = 0,1$ получим тождество

$$1 = 0,3 + 1,5 - 0,4 + 1,8 - 2 - 0,3 + 0,1.$$

Тогда как при мультипликативной модели сигнатурного разложения ощутимое отклонение одного из сомножителей $k_{ij}^{(m)}$ от среднего значения $<n_{00}^{(+)}> = 1$ неминуемо приводит к возникновению сильных флуктуаций всех остальных сомножителей, даже несмотря на их знакопеременность. Например, при $k_{00}^{(1)} = 0,1$, $k_{00}^{(2)} = -10$, $k_{00}^{(3)} = -0,4$, $k_{00}^{(4)} = 8$, $k_{00}^{(5)} = -0,2$, $k_{00}^{(6)} = -1,3$, $k_{00}^{(1)} = 1,2$ получим приближенное тождество

$$1 \approx 0,1 \times (-10) \times 0,4 \times (-8) \times (-0,2) \times 1,3 \times (-1,2).$$

По всей видимости, могут иметь место и аддитивное, и мультипликативное сигнатурные разложения компонент метрических тензоров прямого и обратного интервалов (5.1) и (5.2). Только аддитивное разложение (5.14), (5.15) пригодно, скорее всего, для описания метрико-динамических флуктуаций спокойных, невозмущенных областей $\lambda_{m\div n}$-вакуума. А мультипликативное разложение (5.171а), (5.171а), по-видимому, следует применять для описания сильно возмущенных, энергетически перенасыщенных областей $\lambda_{m\div n}$-вакуума.