6.1. Исторические корни геометрии абсолютного параллелизма A_4 [22]

Искусство – это завуалированная Алгебра, отнимающая жизнь у тех, кто стремится приподнять покрывало ее таинственности.
Бурдель

Геометрия абсолютного параллелизма впервые была рассмотрена в 1923 – 1924 гг. в работах Р. Вайценбека и Д. Витали. Именно Р. Вайценбек указал на возможность существования на n-мерном дифференцируемом многообразии М с координатами $x^1,\dots, x^n$ римановых пространств с тензором Римана – Кристоффеля, равным нулю

$$S^i_{jkm} = 2\,\Delta^i_{j[m,k]} + 2\,\Delta^i_{s[k}\,\Delta^s_{|j|m]} = 0\,. \tag{6.1}$$

Соотношение (6.1) рассматривалось как условие параллельного переноса произвольного вектора в данном пространстве в абсолютном смысле (т. е. не зависящем от выбора пути). В 1924 г. Д. Витали вводит связность пространства абсолютного параллелизма

$$\Delta^k_{ij} = e^k_a e^a_{i,j}\ , \tag{6.2}$$

где

$$,j = \frac{\partial}{\partial x^j};\quad i,j,k\ldots = 0,1,2,3;\quad a,b,c\ldots = 0,1,2,3.$$

Здесь $e^k{}_a$ и $e^a{}_i$ – базисные (реперные) векторы, заданные в каждой точке пространства и переносимые параллельно в абсолютном смысле в любую точку пространства по любому направлению.

Далее Р. Вайценбек показал, что связность (6.2) может быть представлена в виде суммы

$$\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}\ , \tag{6.3}$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m}) \tag{6.4}$$

– символы Кристоффеля и

$$T^i_{jk} = -\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk} + g^{im}\left(g_{is}\Omega^{\cdot\cdot s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{\cdot\cdot s}_{mj}\right) \tag{6.5}$$

– коэффициенты вращения Риччи для базиса e^a_i. Тензор $\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk}$, определяемый как

$$\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk} = e^i_a e^a_{[k,j]} = \frac{1}{2} e^i_a (e^a_{k,j} - e^a_{j,k})\ , \tag{6.6}$$

получил название «объекта неголономности», поэтому возникновение геометрии абсолютного параллелизма продолжило развитие неголономной дифференциальной геометрии. Э. Картан и Я. Схоутен, исходя из групповых свойств пространства постоянной кривизны, ввели связность (6.3), в которой компоненты коэффициентов вращения Риччи (6.6) являются константами.

Отметим, что в геометрии абсолютного параллелизма симметризация и антисимметризация пар индексов обозначаются следующим образом [22]:

$$S_{(ij)} = \frac{1}{2}(S_{ij} + S_{ji})\ ;\qquad S_{[ij]} = \frac{1}{2}(S_{ij} - S_{ji})\ , \tag{6.6a}$$

а исключение индекса из симметризации и антисимметризации [22]:

$$S_{(i|j|k)} = \frac{1}{2}(S_{ijk} + S_{kji})\ ;\qquad S_{[i|j|k]} = \frac{1}{2}(S_{ijk} - S_{kji}). \tag{6.6 б}$$

Суть подхода Э. Картана и Я. Схоутена состоит в следующем. Пусть на n-мерном дифференцируемом многообразии М с координатами $x^1,\ldots,x^n$ поле n контравариантных векторов

$$\xi_a^j = \xi_a^j\left(x^k\right),$$

где $a, b, c \ldots = 1\ldots n$ являются векторными индексами, а $i, j, k\ldots = 1\ldots n$ -координатные индексы.

Предположим, что

$$\det\left(\xi_a^j\right) \neq 0,$$

и что функции ξ_a^j удовлетворяют уравнениям

$$\xi_a^j \xi_{b,j}^k - \xi_b^i \xi_{a,j}^k = -C_{ab}^{\cdot\cdot f} \xi_f^k \quad ,$$

в которых константы $C_{ab}^{\cdot\cdot f}$ имеют следующие свойства:

$$C_{ab}^{\cdot\cdot f} = -C_{ba}^{\cdot\cdot f}, \tag{6.8}$$

$$C_{fb}^{\cdot\cdot a} C_{cd}^{\cdot\cdot f} + C_{fc}^{\cdot\cdot a} C_{db}^{\cdot\cdot f} + C_{fd}^{\cdot\cdot a} C_{bc}^{\cdot\cdot f} = 0. \tag{6.9}$$

Тогда мы можем сказать, что мы имеем n-параметрическую, простую транзитивную группу (группу T_n), действующую на многообразии, причем $C_{ab}^{\cdot\cdot f}$ являются структурными константами этой группы, удовлетворяющими тождеству Якоби (6.9). Векторное поле ξ_b^j называется «инфинитезимальными генераторами» этой группы.

Пусть теперь базис (тетрада) e_b^k, задаваемый в каждой точке многообразия M, удовлетворяет условию

$$\det\left(e_a^j\right) \neq 0 \ .$$

Если предположить, что

$$e_a^j\left(x_0^k\right) = \xi_a^j\left(x_0^k\right),$$

где x_0^k являются координатами некоторой произвольной точки P, то мы имеем для функций $e_a^j\left(x_0^k\right)$ уравнения

$$e_a^j e_{b,j}^k - e_b^j e_{a,j}^k = -C_{ab}^{\cdot\cdot f} e_f^k. \tag{6.10}$$

В силу условий нормировки базиса (тетрады)

$$e_i^a e_a^j = \delta_i^j, \quad e_i^a e_b^i = \delta_b^a \tag{6.11}$$

из равенства (6.10) следует

$$C_{jk}^{\cdot\cdot j} = 2 e_a^i e_{[k,j]}^a = e_a^i C_{bc}^{\cdot\cdot a} e_j^b e_k^c \ . \tag{6.12}$$

Сравнивая (6.12) с (6.6), мы видим, что

$$\Omega_{jk}^{\cdot\cdot i} = \frac{1}{2} C_{jk}^{\cdot\cdot i},$$

т. е. все компоненты объекта неголономности однородного пространства абсолютного параллелизма постоянны. Легко видеть, что связность (6.3) обладает кручением, причем в нашем частном случае

$$\Delta_{[ij]}^k = -\Omega_{ij}^{\cdot\cdot k} = T_{[ij]}^k = -\frac{1}{2} C_{jk}^{\cdot\cdot i} \ .$$

Именно таким образом Э. Картан и Я. Схоутен ввели связность с кручением. Поэтому геометрия Римана – Картана со связностью

$$\Delta_{ijk} = \Gamma_{ijk}^{..} + \frac{1}{2}\left(C_{ijk} - C_{jki} - C_{kij}\right),$$

где $S_{ijk} = -\frac{1}{2} C_{ijk}$ – кручение пространства обязано развитию геометрии абсолютного параллелизма.

С кручением связаны представления о торсионных полях. Слово торсион происходит от английского слова torsion *, что означает вращение. Впервые в науке кручение было связано с вращением французским математиком Ж. Френе, который связал угловую скорость вращения ω с кручением χ по формуле [138]:*

$$\omega = \chi v$$

где v – линейная скорость.

Когда угловая скорость вращения постоянна (ω = const), кручение принимает вид:

$$\chi = 1/r$$

где r – расстояние от оси вращения.

Из формулы Френе получается известная в механике формула вращательного движения: $\omega = v/r$

Дальнейшее развитие геометрии абсолютного параллелизма на n-мерном дифференцируемом многообразии M с координатами $x^1,...,x^n$ (геометрии A_n) нашло отображение в работах Е. Бортолотти, Г. Грисса, Я. Схоутена, Л. Эйзенхарта и других авторов. В частности, Е. Бортолотти первый указал, что связность Картана – Схоутена и связность Вайценбека – Витали (6.2) одно и то же. Кроме того, Е. Бортолотти показал, что тензор (6.1) можно представить в виде суммы

$$S^i_{jkm} = R^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{|j|m]} + 2T^i_{c[k} T^c_{|j|m]} = 0\,,$$

где

$$R^i_{jkm} = 2\,\Gamma^i_{j[m,k]} + 2\,\Gamma^i_{s[k}\Gamma^s_{|j|m]}$$

– тензор Римана, а величины T^i_{jk} определяются согласно (6.4).

В 1937 г. в работах Т. Томаса абсолютный параллелизм рассматривается как параллельный перенос векторов в «большом», поскольку связность пространства A_4 (так же и связность плоского пространства E_n) является интегрируемой. Поэтому в пространстве A_4 вектор, заданный в какой-либо точке пространства, может быть определен в любой другой точке пространства. Наконец, в работах Ж. д‘Арти, Н. Никерсона и Ж. Вольф дается классификация пространств с абсолютным параллелизмом.

Геометрия абсолютного параллелизма A_4 впервые была использована А. Эйнштейном в 1928 г. в приложениях к проблемам теоретической физики. Эйнштейн пытался объединить уравнения своей теории с уравнениями электродинамики Максвелла – Лоренца. Попутно отметим, что в рамках геометрии абсолютного параллелизма Эйнштейном было написано наибольшее число работ (всего 13).

Развивая программу А. Эйнштейна по построению единой теории поля, Г. Шипов пришел к выводу о необходимости использовать геометрию A_4 как геометрию пространства событий всеобщей теории относительности и теории физического вакуума. В отличие от Эйнштейна и его последователей Шипов использовал структурные уравнения Картана геометрии абсолютного параллелизма, которые являются обобщением вакуумных уравнений Эйнштейна $R_{ik} = 0$ для случая, когда тензор энергии-импульса в правой части уравнений Эйнштейна имеет геометрическую природу.

Природа единой теории поля, выдвинутая А. Эйнштейном, предполагает решение двух стратегических проблем современной теоретической физики:

а) программа-минимум ставит своей целью геометризацию уравнений электромагнитного поля и объединение их с уравнениями теории гравитации Эйнштейна;

б) программа направлена на поиски полностью геометризированных уравнений гравитационного и электромагнитного поля (включая источники), т. е. на геометризацию полей, образующих материю.

Несмотря на длительные поиски (около 30 лет), решить эту грандиозную задачу в приемлемом для науки виде А. Эйнштейну не удалось. Совместно со многими выдающимися учеными того времени он написал большое количество работ, в которых использовались различные геометрии. Однако все они не удовлетворяли выдвинутым требованиям пунктов а) и б). Кроме того, не было ясно, каким образом геометризировать спинорные поля (например, поле Дирака), образующие источники электромагнитного поля. Д. Уилер добавил к программе единой теории поля еще один пункт, который требует спинорной формулировки уравнений единого поля.

В математической части «Теории физического вакуума» Г. Шипов изложил основы геометрии A_4 в векторном базисе, где вводится связность и кривизна геометрии абсолютного параллелизма и дается вывод структурных уравнений Картана геометрии A_4

$$\nabla_{[k} e^a_{m]} - e^b_{[k} T^a_{|b|m]} = 0\,,$$

$$R^a_{bkm} + 2\nabla_{[k} T^a_{|b|m]} + 2T^a_{c[k} T^c_{|b|m]} = 0,$$

$$i, j, k\ldots = 0,1,2,3; \quad a, b, c\ldots = 0,1,2,3,$$

а также различные варианты их записи, включая запись во внешних дифференциальных формах. Исследуется групповая структура геометрии A_4. Устанавливается связь между структурными уравнениями группы вращений $O(3.1)$ геометрии A_4 и структурными уравнениями Картана. Проведено расщепление структурных уравнений Картана на правые и левые, соответствующие правой и левой геометриям. Дано представление структурных уравнений Картана в виде расширенной полностью геометризированной системы уравнений Эйнштейна – Янга – Миллса. Получены 10 уравнений движения тетрады: четыре поступательных и шесть вращательных. Введена метрика Киллинга – Картана, действующая на группе вращений $O(3.1)$.

В «Теории физического вакуума» [22] Г.И. Шипов дает физическую интерпретацию данного математического аппарата во многом согласующуюся со взглядами, излагаемыми в теории «упругого» вакуума, развиваемой в рамках Алгебры сигнатур. Но самое главное, Шипов определяет понятие «плотность массы» как свертку тензорного, торсионного поля сил инерции, обусловленного ускорено-поступательными и вращательными движениями локальных участков вакуума. Данное определение плотности массы проливает свет на одно из самых темных пятен современной науки и наполняет его математическим и физическим содержанием. Ряд основополагающих идей теории «упругого» вакуума как составной части Алсигны сформировался под влиянием работ Г.И. Шипова.
Как выяснится ниже, несколько модернизированная геометрия абсолютного параллелизма в интерпретации «Теории физического вакуума» Г. Шипова в идеале подходит для описания метрико-динамического состояния фундоскопического объема двусторонней псевдоповерхности Естества.