6.2. Геометрия абсолютного параллелизма в векторном базисе

Жить в мире, не стараясь понять скрытые законы природы, – все равно что находиться в родной стране, не зная ее языка.
Суфийский мудрец Хазарат Инаят Хан

В предыдущей, 5-й главе настоящего исследования мы рассмотрели возможность метрико-динамического описания фундоскопического объема псевдоповерхности Естества посредством ультраметрики (5.30):

$$ds_{\phi}^{2} = < ds_{\phi}^{(+)} >^{2} - < ds_{\phi}^{(-)} >^{2} = \eta_{ab} e_{i}^{(a)} e_{j}^{(b)} d\xi^{i} d\xi^{j} = \sum_{k=I}^{XVI} c_{ij}^{(k)} d\xi^{i} d\xi^{j} = 0\,, \tag{6.14}$$

где

$$\eta_{ab} = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\,, \tag{6.14а}$$

$$c_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(ab)} = e_{i}^{(a)} e_{j}^{(b)} \tag{6.14б}$$

такие, что [см.(5.75)]:

$$sign\left(c_{ij}^{(ab)}\right) = \begin{matrix} (++++)^{00} & (+++-)^{10} & (-++-)^{20} & (++-+)^{30} \\ (---+)^{01} & (-+++)^{11} & (--++)^{21} & (-+-+)^{31} \\ (+--+)^{02} & (++--)^{12} & (+---)^{22} & (+-++)^{32} \\ (--+-)^{03} & (+-+-)^{13} & (-+--)^{23} & (----)^{33} \end{matrix}\,. \tag{6.14в}$$

Теперь же будет рассматриваться абсолютная дифференциальная геометрия, учитывающая взаимосвязи между совокупностями близлежащих фундоскопических объемов. Другими словами, здесь рассматриваются условия, которые по необходимости накладываются на способы реализации различных форм искривлений фундоскопического объема псевдоповерхности Естества и на динамику их изменения при учете взаимосвязей с ближайшими подобными ему объемами.

Вернемся к рис. 5.1. Напомним, что в данном модельном рассмотрении оси X_0, X_1, X_2, X_3 на рис. 5.1 лишь фиксируют время и место нахождения рассматриваемого фундоскопического объема, метрико-динамическое состояние внешней, субконтной стороны, которая описывается системой отсчета x_0^-, x_1^-, x_2^-, x_3^-, а внутренняя, антисубконтная сторона – системой отсчета x_0^+, x_1^+, x_2^+, x_3^+. Субконтная и антисубконтная системы отсчета задаются, в свою очередь, реперными тетрадами $e_i^{(b)}$ и $e_i^{(a)}$. Таким образом, имеем следующее модельное представление двух сторон фундоскопического объема псевдоповерхности Естества:

$$e_i^{(b)} = e_i^{(b)}\{x_0^-(X_0, X_1, X_2, X_3),\ x_1^-(X_0, X_1, X_2, X_3),\ x_2^-(X_0, X_1, X_2, X_3),\ x_3^-(X_0, X_1, X_2, X_3)\} = e_i^{(b)}\{x^i(X_i)\}$$

– репер, описывающий метрико-динамические свойства внешней стороны фундоскопической ячейки;

$$e_i^{(a)} = e_i^{(a)}\{x_0^+(X_0, X_1, X_2, X_3), x_1^+(X_0, X_1, X_2, X_3), x_2^+(X_0, X_1, X_2, X_3), x_3^+(X_0, X_1, X_2, X_3)\} = e_i^{(a)}\{x^i(X_i)\}$$

– репер, описывающий метрико-динамические свойства внутренней стороны фундоскопической ячейки.
Или в более симметричном виде для антисубконтного репера имеем

$$e_i^{(a)} = e_i^{(a)}\{x_i(x'_i)\}, \tag{6.14г}$$

где принято $X_i = x'_i$.

Такой вид взаимосвязей действительно является более симметричным, поскольку и на самом деле может быть и обратная ситуация

$$e_i^{(a)} = e_i^{(a)}\{x'_i(x_i)\}. \tag{6.14д}$$

Аналогично для субконтного репера можно записать

$$e_i^{(b)} = e_i^{(b)}\{x_i(x'_i)\}, \quad e_i^{(b)} = e_i^{(b)}\{x'_i\,(x_i)\}. \tag{6.14е}$$

Как было показано в п. 3.6, движение участка внешней стороны псевдоповерхности Естества со скоростью v относительно ее внутренней стороны не произвольно, а связано преобразованиями Лоренца.

$$x_0 = \frac{x'_0 t - \dfrac{v x'_1}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}; \quad x_1 = \frac{x'_1 - v x'_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3 \;. \tag{6.14ж}$$

Обратные преобразования имеют вид

$$x'_0 = \frac{x_0 t - \dfrac{v x_1}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}; \quad x'_1 = \frac{x_1 - v x_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3 \;. \tag{6.14з}$$

6.2.1. Геометрия вращательного движения [22]

Под четырехмерной ориентируемой точкой подразумевается точка, снабженная ортогональной тетрадой. Для описания пространства событий динамики ориентируемой точки рассмотрим восьмимерное многообразие $x_0, x_1, x_2, x_3, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (где φ_i – углы Эйлера). Его удобно представить как векторное расслоение с базой, образованной трансляционными координатами x_0, x_1, x_2, x_3 и слоем, заданным в каждой точке x_i (i = 0,1,2,3) ортонормированной тетрадой

$$\boldsymbol{e}_A = \boldsymbol{e}_A\,(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad \text{где } A = 1, 2, 3 \text{ – номер вектора репера.} \tag{6.15}$$

Фактически любой из реперов $\boldsymbol{e}_A$ является математическим представлением 3-мерной произвольно ускоренной системы отсчета.

Напомним, что подразумевается под репером (или ортогональной тетрадой). Для этого введем вектор $d\mathbf{r}$*, соединяющий две бесконечно близкие точки* x^i *и* $x^i + dx^i$ *:* $d\mathbf{r} = \boldsymbol{e}_i\, dx^i$ *. Здесь* $\boldsymbol{e}_i$ *– вектор, касательный к координатной линии* i*, проходящей через исходную точку* x *. Бесконечно малый вектор* $d\mathbf{r}$ *можно задать через его компоненты* dr^a *в локальной лоренцевой (или декартовой) системе координат.*

Выражение для компоненты dr^a *можно переписать в виде* $dr^a = e^a{}_i\, dx^i$*. Четверку линейно независимых реперных векторов* $\boldsymbol{e}^a{}_i$ *в четырехмерном пространстве, нумеруемых индексом а, называют тетрадой [88]. При этом квадрат длины вектора* $d\mathbf{r}$ *может быть выражен через скалярное произведение реперных векторов:* $dr^2 = (\boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{e}_j) dx^i dx^j$ *. С другой стороны, это не что иное, как* $ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$ *, откуда следует* $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i\, \boldsymbol{e}_j) = e_i{}^a e_{j\,a}$ *. Элемент объема dV, построенный на реперных векторах* $\boldsymbol{e}_0\, dx^0$*,* $\boldsymbol{e}_1\, dx^1$*,* $\boldsymbol{e}_2\, dx^2, \ldots,$ $\boldsymbol{e}_n\, dx^n$ *(где n – размерность пространства) выражается, как известно, через определитель Грама* $dV = [\det(\boldsymbol{e}_i\, dx^i\, \boldsymbol{e}_j\, dx^j)]^{?}$ *(здесь нет суммирования по i, j) , или [88]*

$$dV = \sqrt{\det(e_i e_j)}\,dx^0 dx^1 \ldots dx^n = \sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^0 dx^1 \ldots dx^n = \sqrt{g}\,dx^0 dx^1 \ldots dx^n$$

$$B \;\; OTO \;\; g = \det(g_{ij}) < 0, \; \textit{элемент} \quad \textit{объема} \;\; \textit{равен} \; dV = \sqrt{-g}\,dx^0 dx^1 dx^2 dx^2 .$$

Согласно теореме Эйлера, бесконечно малые повороты вокруг трех осей репера можно заменить одним поворотом на угол $d\chi$ вокруг определенной оси, проходящей через начало тетрады O. Бесконечно малый поворот (в отличие от конечного поворота) можно задать вектором

$$d\chi = d\chi \boldsymbol{e}_\chi , \tag{6.15а}$$

где вектор $\boldsymbol{e}_\chi$ направлен вдоль мгновенной оси вращения системы отсчета. Это направление выбирается так, что если смотреть с конца вектора e_χ на неподвижную точку O, то поворот совершается против часовой стрелки (правая система отсчета). Бесконечно малое изменение векторов репера e_χ при повороте $d\chi$ имеет вид

$$d\boldsymbol{e}_A = [d\chi \boldsymbol{e}_A] \,. \tag{6.15б}$$

Разделив (6.15*б*) на dt, получим

$$\frac{d\vec{e}_A}{dt} = \left[\frac{d\vec{\chi}}{dt}\vec{e}_A\right] = [\vec{\omega}\,\vec{e}_A], \tag{6.15в}$$

где $\omega = d\chi\,/dt$ – трехмерная угловая скорость вращения системы отсчета относительно мгновенной оси. Выбирая ортогональную тетраду

$$a)\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{A}}_{\alpha}\, e^{\alpha}_{B} = \delta^{A}_{B} = \begin{cases} 1 & \mathrm{A} = \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{A} \neq \mathrm{B} \end{cases},$$

$$б)\qquad \mathrm{e}^{\mathrm{A}}_{\alpha}\, e^{\beta}_{A} = \delta^{\beta}_{\alpha} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}, \tag{6.15г}$$

где $\alpha, \beta\ldots$ – векторные индексы, а A , $B\ldots$– обозначают номер вектора (A, $B\ldots$ = 1, 2, 3; α, δ, β = 1, 2, 3) , можно записать соотношения (6.15*б*) и (6.15 в) в виде

$$de^{A}_{\alpha} = d\chi^{\beta}_{\alpha}\, e^{A}_{\beta}\ , \tag{6.15д}$$

$$\frac{de^{A}_{\alpha}}{dt} = \frac{d\chi^{\beta}_{\alpha}}{dt} e^{A}_{\beta}\ . \tag{6.15е}$$

Умножая равенство (6.15д) на $e^{\beta}{}_{A}$ и используя условия ортогональности (6.15г), получим

$$d\chi^{\beta}{}_{\alpha} = e^{\beta}{}_{A}\, de^{A}{}_{\alpha}\,. \tag{6.15ж}$$

Дифференцируя условия ортогональности (6.15 г), получим

$$e^{A}{}_{\alpha}\, de_{\beta\alpha} + e_{\beta A}\, de^{A}{}_{\alpha} = 0,$$

откуда

$$d\chi_{\alpha\beta} + d\chi_{\beta\alpha} = 0\ .$$

Следовательно,

$$d\chi_{\alpha\beta} = -\,d\chi_{\beta\alpha}. \tag{6.15з}$$

Величины (6.15з) описывают бесконечно малый поворот трехмерной системы отсчета и определяют трехмерную метрику Киллинга – Картана

$$d\upsilon^{2} = d\chi_{\alpha\beta}\, d\chi^{\alpha\beta}, \tag{6.15и}$$

заданную на группе трехмерных вращений $O(3)$, действующей на множестве координат φ_1, φ_2, φ_3. Умножая (6.15е) на $e^{\beta}{}_{A}$ и используя условия ортогональности (6.15г), получим

$$\frac{d\chi^{\beta}_{\alpha}}{dt} = e^{\beta}_{A}\frac{de^{A}_{\alpha}}{dt} = \omega^{\beta}_{\alpha}\ , \tag{6.15к}$$

причем тензор угловой скорости вращения системы отсчета в 3-мерном случае связан с компонентами вектора $\omega = d\chi/dt = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ следующим образом:

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} = -\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.15л}$$

6.2.2. Объект неголономности. Связность абсолютного параллелизма [22]

Рассмотрим четырехмерное дифференцируемое многообразие с координатами x^i *(i = 0, 1, 2, 3),* причем в каждой точке этого многообразия задан вектор $e_i{}^a$ (i = 0, 1, 2, 3) (т. е. тетрада) и ковектор $e_b{}^j$ (b = 0,1, 2, 3) (ковариантная тетрада) с условиями нормировки

$$e_i^a e_a^j = \delta_i^j; \quad e_i^a e_b^i = \delta_b^a. \tag{6.16}$$

При произвольных преобразованиях координат

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} dx^k \tag{6.17}$$

по координатному индексу i тетрада e_i^a преобразуется как вектор

$$e_{i'}^a = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e_i^a, \tag{6.18}$$

при этом по тетрадному индексу a относительно преобразований (6.18) она ведет себя как скаляр.

Тетрада e_i^a определяет метрический тензор пространства абсолютного параллелизма

$$g_{ik} = \eta_{ab} e_i^a e_k^b, \quad \eta_{ab} = \eta^{ab} = \mathrm{diag}(1\text{-}1\text{-}1\text{-}1) \tag{6.19}$$

и риманову метрику

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{6.20}$$

Здесь для упрощения, так же как в [22], принято, что тензор η_{ab} *диагонален, т. е. согласно (6.19),* η_{ab} = diag(1 –1 –1 –1), *тогда как в Алгебре сигнатур этот тензор, согласно (6.14а), должен быть единичным. Однако вид этого тензора, в силу аддитивного характера Алгебры сигнатур, практически не меняет сути развиваемого здесь математического аппарата, лишь сделает его значительно более громоздким. Мы вполне можем пока ограничиться диагональным видом тензора* η_{ab} *, пологая, однако, что это важный, но лишь частный случай Алгебры сигнатур, где необходимо учитывать все 16 сигнатур, входящих в матрицу (6.14в).*

Используя метрический тензор (6.19), можно построить символы Кристоффеля по обычному правилу

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(g_{jm,k} + g_{km,j} - g_{jk,m} \right), \tag{6.21}$$

имеющие нетензорный закон преобразования

$$\Gamma^{k'}_{j'i'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ji} \tag{6.22}$$

относительно координатных преобразований (6.17). В соотношении (6.22) и далее обычную производную по координатам x^i мы будем обозначать как

$$,k = \frac{\partial}{\partial x_k}. \qquad (6.23)$$

Дифференцируя произвольный вектор $e_i^{\ a}$, имеем

$$e^a_{i,j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} e^a_{i,j} \quad . \qquad (6.24)$$

Применяя операцию дифференцирования (6.24) к соотношению (6.18), находим

$$e^a_{i',j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} e^a_{i,j} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} e^a_i. \qquad (6.25)$$

Альтернируя индексы i' и j' и вычитая полученное выражение из (6.25), имеем

$$e^a_{i',j'} - e^a_{j',i'} = \left(e^a_{i,j} - e^a_{j,i}\right) \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \quad .$$

Учитывая (6.18), можно переписать это соотношение в виде

$$e^{k'}_a \left(e^a_{i',j'} - e^a_{j',i'}\right) = e^k_a \left(e^a_{i,j} - e^a_{j,i}\right) \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}.$$

По определению, дифференциал

$$ds^a = e^a_i\, dx^i \qquad (6.26)$$

является полным, если выполняется соотношение

$$e^a_{i,j} - e^a_{j,i} = 0. \qquad (6.27)$$

В противном случае, когда $e^a_{i,j} - e^a_{j,i} \neq 0$, дифференциал (6.26) не является интегрируемым (т. е. равенство (6.27) представляет собой условие интегрируемости для соотношения (6.26)).

Введем следующий геометрический объект:

$$\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk} = e^i_a e^a_{[k,j]} = \frac{1}{2} e^i_a \left(e^a_{k,j} - e^a_{j,k}\right) \qquad (6.28)$$

с тензорным законом преобразования относительно координатных преобразований (6.17)

$$\Omega^{\cdot\cdot i'}_{j'k'} = \Omega^{\cdot\cdot i}_{jk} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \quad . \qquad (6.29)$$

Очевидно, что при условии (6.27) этот объект обращается в нуль. В этом случае тетрада e^a_i является голономной и метрика (6.20) характеризует голономную дифференциальную геометрию. Если же объект (6.29) отличен от нуля, то мы имеем дело с неголономной дифференциальной геометрией, причем сам объект (6.29) называется «объектом неголономности».

Перепишем соотношение (6.25) следующим образом

$$e^a_{i',j'} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} e^a_i + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} e^a_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \Delta^{\ k}_{ij}\right) e^a_k\,, \qquad (6.30)$$

где мы ввели обозначение

$$\Delta^k_{ij} = e^k_a e^a_{i,j} \qquad (6.31)$$

и воспользовались условием ортогональности (6.16). Из соотношения (6.30) видно, что объект Δ^k_{ij} преобразуется относительно преобразований (6.17) как связность

$$\Delta^{k'}_{i',j'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Delta^{\ k}_{ij} . \qquad (6.32)$$

Связность пространства, определяемая согласно (6.31), называется связностью абсолютного параллелизма.

Переставляя в (6.32) индексы i и j, имеем

$$\Delta^{k'}_{j'i'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Delta^{\ k}_{ji} . \qquad (6.33)$$

Вычитая (6.33) из (6.32), находим

$$\Delta^{\ k'}_{[j'i']} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Delta^{\ k}_{[ij]} . \qquad (6.34)$$

Из соотношений (6.34) и (6.28) следует, что связность абсолютного параллелизма обладает кручением

$$\Delta^{\ k}_{[ij]} = -\Omega^{\ \ ..k}_{ij} , \qquad (6.35)$$

определяемым объектом неголономности.

6.2.3. Ковариантное дифференцирование в геометрии A_4 Коэффициенты вращения Риччи [22]

Определение ковариантной производной относительно связности геометрии абсолютного параллелизма (геометрии A_4) Δ^i_{jk} от тензора произвольной валентности $U^{i\dots p}_{m\dots n}$ имеет вид

$$\overset{*}{\nabla}_k U^{i\dots p}_{m\dots n} = U^{i\dots p}_{m\dots n,k} + \Delta^i_{jk}U^{j\dots p}_{m\dots n} + \dots + \Delta^p_{jk}U^{i\dots j}_{m\dots n} - \Delta^j_{mk}U^{i\dots p}_{j\dots n} - \dots - \Delta^j_{nk}U^{i\dots p}_{m\dots j} . \qquad (6.36)$$

Это определение позволяет доказать некоторые весьма полезные соотношения в геометрии A_4.

Предложение 6.1.
Параллельный перенос тетрады e^a_i относительно связности Δ^i_{jk} тождественно равен нулю.

Доказательство. Из определения (6.36) имеем следующие равенства

$$\overset{*}{\nabla}_k e^i_a = e^i_{a,k} + \Delta^i_{jk} e^j_a .$$
$$\overset{*}{\nabla}_k e^a_j = e^a_{j,k} - \Delta^i_{jk} e^a_i . \qquad (6.37)$$

Поскольку связность $\Delta^i_{j\,k}$ определяется как

$$\Delta^i_{jk} = e^i_a e^a_{j,k} , \qquad (6.38)$$

то

$$e^i_a e^a_{j,k} - \Delta^i_{jk} = 0 . \qquad (6.39)$$

Умножая это равенство на e_i^a и учитывая условия ортогональности (6.16), находим

$$\overset{*}{\nabla}_k e_j^a = e_{j,k}^a - \Delta_{jk}^i e_i^a = 0 \ . \tag{6.40}$$

Для доказательства равенства нулю соотношения (6.37) возьмем производную от свертки $e_j^a e_a^i = \delta_j^i$:

$$\left(\delta_j^i\right)_{,k} = \left(e_j^a e_a^i\right)_{,k} = e_a^i e_{j,k}^a + e_j^a e_{a,k}^i = 0, \tag{6.41}$$

Откуда, с учетом соотношения (6.38), следует

$$\Delta_{jk}^i = -e_j^a e_{a,k}^i \tag{6.42}$$

или

$$e_j^a e_{a,k}^i + \Delta_{jk}^i = 0 \ .$$

Умножая это соотношение на e_a^j и используя первое из условий (6.16), получим

$$\overset{*}{\nabla}_k e_a^i = e_{a,k}^i + \Delta_{jk}^i e_a^j = 0 \ . \tag{6.43}$$

Что и требовалось доказать.

Предложение 6.2.

Связность Δ_{jk}^i может быть представлена в виде суммы

$$\Delta_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + T_{jk}^i \ , \tag{6.44}$$

где Γ_{jk}^i – символы Кристоффеля, определяемые согласно соотношению (6.21), а

$$T_{jk}^i = -\Omega_{jk}^{..i} + g^{im}\left(g_{js}\Omega_{mk}^{..s} + g_{ks}\Omega_{mj}^{..s}\right) \tag{6.45}$$

– коэффициента вращения Риччи.

Доказательство: Представим связность (6.44) в виде суммы симметричной и антисимметричной по индексам j, k частей

$$\Delta_{jk}^i = \Delta_{(jk)}^i + \Delta_{[jk]}^i \ , \tag{6.46}$$

где

$$\Delta_{(jk)}^i = \frac{1}{2}\left(\Delta_{jk}^i + \Delta_{kj}^i\right), \qquad \Delta_{[jk]}^i = \frac{1}{2}\left(\Delta_{jk}^i - \Delta_{kj}^i\right).$$

Прибавим и вычтем в правой части (6.46) одно и то же выражение

$$\Delta_{jk}^i = \Delta_{(jk)}^i + \Delta_{[jk]}^i + g^{im}\left(g_{js}\Delta_{[km]}^s + g_{ks}\Delta_{[jm]}^s\right) - g^{im}\left(g_{js}\Delta_{[km]}^s + g_{ks}\Delta_{[jm]}^s\right). \tag{6.47}$$

Сгруппируем члены в правой части (6.47) следующим образом

$$\Delta_{jk}^i = \Delta_{(jk)}^i - g^{im}\left(g_{js}\Delta_{[km]}^s + g_{ks}\Delta_{[jm]}^s\right) + \Delta_{[jk]}^i + g^{im}\left(g_{js}\Delta_{[km]}^s + g_{ks}\Delta_{[jm]}^s\right). \tag{6.48}$$

Поскольку

$$\Delta_{[jk]}^i = -\Omega_{jk}^{..i} \ ,$$

то из (6.48) и (6.45) следует

$$\Delta_{jk}^i = \Delta_{(jk)}^i - g^{im}\left(g_{js}\Delta_{[km]}^s + g_{ks}\Delta_{[jm]}^s\right) + T_{jk}^i \ . \tag{6.49}$$

Покажем теперь, что

$$\Gamma^i_{jk} = \Delta^i_{(jk)} - g^{im}\left(g_{js}\Delta^s_{[km]} + g_{ks}\Delta^s_{[jm]}\right). \tag{6.50}$$

Действительно, имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&\Delta^i_{(jk)} = e^i_a e^a_{(j,\,k)} = \frac{1}{2} e^i_a \left(e^a_{j,\,k} + e^a_{k\,,\,j}\right),\\
&\Delta^i_{[jk]} = e^i_a e^a_{[j,\,k]} = \frac{1}{2} e^i_a \left(e^a_{j,\,k} - e^a_{k,\,j}\right),\\
&g_{js} = \eta_{ab} e^a_j e^b_s,
\end{aligned} \tag{6.51}$$

поэтому соотношение (6.50) принимает вид

$$\Gamma^i_{jk} = e^i_a e^a_{(j,\,k)} + g^{im}\left(\eta_{ab} e^a_j e^b_{[m,\,k]} + \eta_{ab} e^a_k e^b_{[m,\,j]}\right) = \frac{1}{2}\eta^{cd}\eta_{ab} e^i_c e^m_d \left(e^b_m e^a_{j,k} + e^b_m e^c_{k,\,j}\right) +$$
$$+\frac{1}{2} g^{im}\left(\eta_{ab}\left(e^a_j e^b_{m,k} - e^a_j e^b_{k,\,m}\right) + \eta_{ab}\left(e^a_k e^b_{m,j} - e^a_k e^b_{j,\,m}\right)\right).$$

Перегруппируя члены в этом соотношении, имеем

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}\left(\left(\eta_{ab} e^a_j e^b_m\right)_{,\,k} + \left(\eta_{ab} e^a_k e^b_m\right)_{,\,j} - \left(\eta_{ab} e^a_j e^b_k\right)_{,\,m}\right),$$

откуда, учитывая соотношение (6.51), получим

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im}\left(g_{jm,k} + g_{km,\,j} - g_{jk,m}\right),$$

или

$$\frac{1}{2} g^{im}\left(g_{jm,k} + g_{km,\,j} - g_{jk,m}\right) = \Delta^i_{(jk)} - g^{im}\left(g_{js}\Delta^s_{[km]} + g_{ks}\Delta^s_{[jm]}\right) = \Gamma^i_{jk}\ . \tag{6.52}$$

Подставляя (6.52) в (6.49), получим соотношение (6.44).

Предложение 6.3.

Коэффициенты вращения Риччи T^i_{jk} могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
T^i_{jk} &= e^i_a \nabla_k e^a_j\ ,\\
T^i_{jk} &= -e^a_j \nabla_k e^i_a\ ,
\end{aligned} \tag{6.53}$$

где через ∇_k обозначена ковариантная производная относительно символов Кристоффеля Γ^i_{jk}.

Доказательство: Представим в соотношениях (6.40) и (6.43) связность Δ^i_{jk} в виде суммы (6.44)

$$\begin{aligned}
&\overset{*}{\nabla}_k\, e^a_j = e^a_{j,\,k} - \Gamma^i_{jk}\, e^a_i - T^i_{jk}\, e^a_i = 0\ ,\\
&\overset{*}{\nabla}_k\, e^i_a = e^i_{a,\,k} + \Gamma^i_{jk}\, e^j_a + T^i_{jk}\, e^j_a = 0.
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Поскольку, по определению

$$\begin{aligned}
\nabla_k e^a_j &= e^a_{j,\,k} - \Gamma^i_{jk}\, e^a_i\ ,\\
\nabla_k e^i_a &= e^i_{a,\,k} + \Gamma^i_{jk}\, e^j_a\ ,
\end{aligned}$$

то (6.54) можно записать как

$$\begin{aligned}
\nabla_k e^a_j - T^i_{jk} e^a_i &= 0\ ,\\
\nabla_k e^i_a + T^i_{jk} e^j_a &= 0.
\end{aligned} \tag{6.55}$$

Умножая первое выражение из (6.55) на e^i_a, а второе, соответственно, на e^a_j, получим, после использования условия ортогональности (6.16), соотношения (6.53). Вычислим теперь ковариантную производную $\overset{*}{\nabla}_k$ от метрического тензора g^{im}, помня, что $g^{jm} = \eta^{ab} e^j_a e^m_b$

$$\overset{*}{\nabla}_k g^{jm} = \overset{*}{\nabla}_k \eta^{ab} e^j_a e^m_b = \overset{*}{\nabla}_k e^j_a e^{ma} = e^{ma} \overset{*}{\nabla}_k e^j_a + e^j_a \overset{*}{\nabla}_k e^{ma} . \qquad (6.56)$$

Учитывая соотношения (6.40) и (6.43), получим

$$\overset{*}{\nabla}_k g^{jm} = 0 \quad . \qquad (6.57)$$

С другой стороны, применяя формулу (6.36) к соотношению (6.57), находим

$$\overset{*}{\nabla}_k g^{jm} = g^{jm}_{\ ,k} + \Delta^j_{pk} g^{pm} + \Delta^m_{pk} g^{jp} = 0 \quad . \qquad (6.58)$$

Представляя связность Δ^i_{jk} в виде суммы (6.44), запишем соотношение (6.58) в виде

$$\overset{*}{\nabla}_k g^{jm} = \nabla_k g^{jm} + T^j_{pk} g^{pm} + T^m_{pk} g^{jp} = 0 . \qquad (6.59)$$

Поскольку имеет место равенство

$$\nabla_k g^{jm} = g^{jm}_{\ ,k} + \Gamma^j_{pk} g^{pm} + \Gamma^m_{pk} g^{jp} = 0 \quad , \qquad (6.60)$$

то из (6.59) следует

$$T^j_{pk} g^{pm} + T^m_{pk} g^{ip} = T^{jm}_k + T^{mj}_k = 0 \quad .$$

Это равенство устанавливает следующие свойства симметрии у коэффициентов вращения Риччи

$$T_{jmk} = -T_{mjk} \quad , \qquad (6.61)$$

поэтому в геометрии A_4 коэффициенты вращения Риччи имеют 24 независимые компоненты.

6.2.4. Тензор кривизны пространства A_4 [22]

Тензор кривизны пространства абсолютного параллелизма S^i_{jkm} определяется через связность Δ^i_{jk} по обычному правилу

$$S^i_{jkm} = 2\Delta^i_{j[m,k]} + 2\Delta^i_{s[k}\Delta^s_{|j|m]} = 0 \quad , \qquad (6.62)$$

где квадратные скобки [ ] означают альтернацию по соответствующим индексам, а индекс, заключенный в вертикальные линии | |, не подлежит альтернации.

Предложение 6.4

Тензор Римана-Кристоффеля пространства со связностью (6.42) тождественно равен нулю.

Доказательство: Из соотношения (6.42) имеем

$$e^a_{k,j} = \Delta^i_{jk} e^a_i \quad , \qquad (6.63)$$

Дифференцируя соотношение (6.63) по m, находим

$$e^a_{j,k,m} = \left(\Delta^i_{jk}\ e^a_i\right)_{,m} = \Delta^i_{jk\ ,\ m} e^a_i + e^a_{i,\ m}\Delta^i_{jk} = \left(\Delta^i_{jk,\ m} + e^i_a\ e^a_{s,m}\ \Delta^s_{jk}\right) e^a_i = \left(\Delta^i_{jk,\ m} + \Delta^i_{sm}\Delta^s_{jk}\right) e^a_i\ . \tag{6.64}$$

Альтернируя это соотношение по индексам k и m, получим

$$-2\, e^a_{j,[k,\ m]} = 2\left(\Delta^i_{j[m,\ k]} + 2\,\Delta^i_{s[k}\,\Delta^s_{|j|m]}\right) = S^i_{jkm}\ e^a_i\,. \tag{6.65}$$

Поскольку операция дифференцирования по индексам k и m симметрична, то

$$e^a_{j,\ [k,\ m]} = 0\,.$$

Учитывая это равенство и произвольность e^a_i в соотношении (6.65), получим

$$S^i_{jkm} = 0\ . \tag{6.66}$$

<u>Предложение 6.5.</u>

Тензор S^i_{jkm} может быть представлен в виде суммы

$$S^i_{jkm} = R^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{|j|m]} + 2T^i_{c[k} T^c_{|j|m]} = 0\ \ , \tag{6.67}$$

где

$$R^i_{jkm} = 2\,\Gamma^i_{j[m,\ k]} + 2\,\Gamma^i_{s[k}\,\Gamma^s_{|j|m]} \tag{6.68}$$

– тензор Римана пространства A_4.

<u>Доказательство</u>: Подставив сумму $\Delta^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}$ в соотношение (6.62), имеем

$$S^i_{jkm} = 2\Gamma^i_{j[m,\ k]} + 2\,\Gamma^i_{s[k}\,\Gamma^s_{|j|m]} + 2\,T^i_{j[m,\ k]} + 2T^i_{s[k}\,T^s_{|j|m]} + 2T^i_{s[k}\,\Gamma^s_{|j|m]} + 2\Gamma^i_{s[k}\,T^s_{|j|m]} = 0\,. \tag{6.69}$$

Используя соотношение (6.68), запишем (6.69) в виде

$$S^i_{jkm} = R^i_{jkm} + 2T^i_{j[m,\ k]} + 2T^i_{s[k}\,T^s_{|j|m]} + 2\Gamma^s_{j[k}\,T^i_{|s|m]} + 2\Gamma^i_{s[k}\,T^s_{|j|m]} = 0\,. \tag{6.70}$$

Если теперь прибавить к правой части этого соотношения выражение

$$-2\Gamma^i_{[km]}T^i_{sj} = 0$$

и учитывая, что

$$\nabla_k U^{i..p}_{m...n} = U^{i..p}_{m...n,\ k} + \Gamma^i_{jk} U^{i..p}_{m...n} + \ldots + \Gamma^p_{jk} U^{i..j}_{m...n} - \Gamma^j_{mk} U^{i..p}_{j...n} - \ldots - \Gamma^j_{nk} U^{i..p}_{m...j}\ \ , \tag{6.71}$$

получим из (6.70) равенство (6.67) в виде

$$R^i_{jkm} = -\,2T^i_{j[m,\ k]} - 2T^i_{s[k}\,T^s_{|j|m]}\ \ . \tag{6.72}$$

Подставляя сюда равенства (6.53), имеем:

$$-2T^i_{j[m,\ k]} = -2e^i_a\nabla_{[k}\nabla_{m]}e^a_j - 2\nabla_{[k}\,e^i_{|a|}\nabla_{m]}e^a_j\ \ .$$

$$-2T^i_{s[k}\,T^s_{|j|m]} = 2e^a_s\nabla_{[k}\,e^i_{|a}\,e^s_{a|}\nabla_{m]}e^a_j = 2\nabla_{[k}\,e^i_{|a|}\nabla_{m]}e^a_j\ \ ,$$

поэтому из соотношения (6.72) следует

$$R^i_{jkm} = -2e^i_a\nabla_{[k}\nabla_{m]}e^a_j = 2e^i_a\nabla_{[m}\nabla_{k]}e^a_j\ \ . \tag{6.73}$$

6.2.5. Геометрия A_4 как групповое многообразие. Метрика Киллинга – Картана [22]

Уравнения Картана геометрии абсолютного параллелизма показывают, что на самом деле это пространство проявляет себя как многообразие, на котором действует группа трансляций T_4 и группа вращений $O(3.1)$. Будем рассматривать геометрию A_4 как групповое 10-мерное многообразие, образованное четырьмя поступательными координатами x_i (i = 0,1,2,3) и шестью (в силу соотношения $e^a_i e^j_a = \delta^j_i$) «угловыми координатами» e^a_i (a = 0,1,2,3). Пусть на этом многообразии действует группа четырехмерных трансляций T_4 и группа вращении $O(3.1)$. Введем инвариантную производную Хаяши

$$\nabla_b = e^k_b\,\partial_k\ , \tag{6.74}$$

компоненты которой представляют собой генераторы группы трансляций T_4, действующей на многообразии трансляционных координат x_i. Если представить тетраду в виде суммы

$$e^k_b = \delta^k_b + a^k_b\,, \tag{6.75}$$

где $i, j, k, \ldots$ = 0, 1, 2, 3; $a, b, c, \ldots$= 0, 1, 2, 3 ,
то поле a^k_b можно рассматривать как потенциал калибровочного поля группы трансляций T_4. В том случае, когда $a^k_b = 0$, генераторы (6.74) совпадают с генераторами группы трансляций псевдоевклидова пространства E_4.

Мы уже знаем, что по координатному индексу k неголономная тетрада e^k_a преобразуется как вектор

$$e^{k'}_a = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} e^k_a\ ,$$

откуда, с учетом (5.75), следует закон преобразования поля a^k_a относительно трансляций

$$a^{k'}_b = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n} a^n_b + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^n}\delta^n_b - \delta^{k'}_b\ .$$

Определим репер e^i_a в виде

$$e^i_a = \nabla_a x^i\ ,$$

и запишем коммутационные соотношения для генераторов (6.74) как

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]} = -\Omega^{..c}_{ab}\nabla_c\ , \tag{6.76}$$

где $-\Omega^{..c}_{ab}$ – структурные функции группы трансляций пространства A_4, тогда, действуя оператором (6.76) на многообразие x^i, получим структурные уравнения группы T_4 пространства A_4 в виде

$$\nabla_{[a}\nabla_{b]}x^i = -\Omega^{..c}_{ab}\nabla_c x^i$$

или

$$\nabla_{[a}e^i_{b]} = -\Omega^{..c}_{ab}e^i_c\ .$$

В этом соотношении структурные функции $-\Omega^{..c}_{ab}$ определяются как

$$-\Omega^{..c}_{ab} = e^c_i\nabla_{[a}e^i_{b]}\,. \tag{6.76a}$$

Из этого равенства видно, что когда потенциалы калибровочного поля группы трансляций a^k_b в соотношении (6.75) обращаются в нуль, то в нуль обращаются и структурные функции (6.76a). Поэтому мы будем называть поле $\Omega_{ab}^{..c}$ калибровочным полем группы трансляций. Учитывая, что $T_{[ab]}^{c} = -\Omega_{ab}^{..c}$, перепишем структурные уравнения (6.76а) в виде

$$\nabla_{[k} e_{m]}^{a} - e_{[k}^{b} T_{|b|m]}^{a} = 0 \,. \tag{6.77}$$

Легко видеть, что уравнения (6.77) могут быть получены путем альтернации первого уравнения (6.55), кроме того, они совпадают с первыми структурными уравнениями Картана геометрии абсолютного параллелизма. Структурные уравнения группы T_4, записанные в виде уравнений (6.76а), можно рассматривать как определение для кручения пространства A_4. Таким образом, кручение пространства A_4 совпадает со структурными функциями группы трансляций этого пространства, при этом структурные функции удовлетворяют обобщенному тождеству Якоби

$$\overset{*}{\nabla}_{[b}\, \Omega_{cd]}^{...a} + 2\Omega_{[bc}^{...f}\, \Omega_{d]f}^{..a} = 0 \,, \tag{6.78}$$

где $\overset{*}{\nabla}_{b}$ – ковариантная производная берется относительно связности абсолютного параллелизма Δ_{bc}^{a}. Тождество Якоби (6.78), которому удовлетворяют структурные функции группы трансляций геометрии A_4, совпадает с первым тождеством Бианки геометрии абсолютного параллелизма. Векторы

$$e_{a}^{i} = \nabla_{a} x^{i} \,, \tag{6.79}$$

образующие векторное расслоение геометрии A_4, расположены в касательной к каждой точке многообразия псевдоевклидовой плоскости с метрическим тензором

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = diag(1,-1,-1,-1)\,. \tag{6.80}$$

Поэтому десятимерное многообразие (четыре трансляционные координаты x^i и шесть «вращательных координат» e_a^i) геометрии абсолютного параллелизма мы можем рассматривать как расслоение с координатами базы x^i и неголономными слоями e_c^i. Если в базе x^i действует группа трансляций T_4, то в слое e_c^i группа вращений $O(3.1)$. Из формулы (6.79) бесконечно малые трансляции в базе x^i в направлении a определяется вектором

$$ds^{a} = e_{i}^{a}\, dx^{i} \,. \tag{6.81}$$

Образуя из (6.81) и ковариантного вектора $ds_a = e_a^i\, dx_i$ инвариантную свертку ds^2, получим метрику Римана пространства A_4:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \,, \tag{6.82}$$

с метрическим тензором

$$g_{ik} = \eta_{ab} e_i^a e_k^b$$

поэтому риманову метрику (6.82) можно рассматривать как метрику, заданную на группе трансляций T_4.

Поскольку в слое мы имеем «угловые координаты» e_a^i, на многообразии которых действует группа $O(3.1)$, то естественно определить структурные уравнения этой группы, а также метрику, заданную на группе $O(3.1)$. Перепишем соотношения (6.53) в матричной форме

$$\begin{aligned} T_{bk}^{a} &= e_i^a T^i_{\ jk} e_b^i = \nabla_k e_j^a e_b^j \,, \\ T_{bk}^{a} &= e_i^a T^i_{\ jk} e_b^i = -e_i^a \nabla_k e_b^j \end{aligned} \tag{6.83}$$

Эти соотношения позволяют установить зависимость между бесконечно малым поворотом $d\chi_{ab} = -d\chi_{ba}$ вектора e_i^a при бесконечно малых трансляциях ds_a. Действительно, из соотношений (6.83) следует

$$\begin{aligned} d\chi_{b}^{a} &= T_{bk}^{a}\, dx^k = De_j^a e_b^j \,, \\ d\chi_{b}^{a} &= T_{bk}^{a}\, dx^k = -e_i^a De_b^i \,, \end{aligned} \tag{6.84}$$

где D – абсолютный дифференциал относительно символов Кристоффеля Γ^i_{jk} . Образуя с помощью (6.84) инвариантную квадратичную форму $d\tau^2 = d\chi^a_b d\chi^b_a$, получим метрику Киллинга – Картана

$$d\tau^2 = d\chi^a_b d\chi^b_a = T^a_{bk} T^b_{an} dx^k dx^n = -De^a_i De^i_a \tag{6.85}$$

с метрическим тензором

$$H_{kn} = T^a_{bk} T^b_{an} . \tag{6.86}$$

В отличие от метрики (6.82) метрика (6.85) задана на группе вращений $O(3.1)$, действующей на многообразии «вращательных координат» e^a_i. Введем теперь ковариантную производную

$$\overset{*}{\nabla}_m = \nabla_m + T_m , \tag{6.87}$$

где T_m – матрица T^a_{bm}, у которой опущены матричные индексы, и будем рассматривать компоненты этой производной как генераторы группы вращений $O(3.1)$. Действуя этим оператором на тетраду e^i, образующую многообразие «угловых координат» геометрии A_4, имеем

$$\overset{*}{\nabla}_m e^i = \nabla_m e^i + T_m e^i = 0 , \tag{6.88}$$

откуда

$$T_m = -e_i \nabla_m e^i . \tag{6.89}$$

Интересно отметить, что подобно тому, как в соотношении (6.79) мы определили шесть «угловых координат» e^i_a через четыре трансляционных координаты x^i, так и в соотношении (6.89) можно определить 24 «суперкоординаты» T^a_{bm} через шесть координат e^i_a . Из равенства (6.88) следует

$$\nabla_m e^i = -T_m e^i . \tag{6.90}$$

Напомним, что в соотношениях (6.88) – (6.90) через ∇_m обозначена ковариантная производная относительно Γ^i_{jk} и возьмем ковариантную производную ∇_k от соотношения (6.90):

$$\nabla_k \nabla_m e^i = -\nabla_k \left(T_m e^i\right) = -\left(\nabla_k T_m e^i + T_m \nabla_k e^i\right) = -\left(\nabla_k T_m e^i + T_m e^i e_i \nabla_k e^i\right).$$

Используя соотношение (6.89), перепишем это выражение как

$$\nabla_k \nabla_m e^i = -\left(\nabla_k T_m - T_m T_k\right) e^i .$$

Альтернируя это выражение по индексам k и m, имеем

$$\nabla_{[k} \nabla_{m]} e^i = \frac{1}{2} R_{km} e^i , \tag{6.91}$$

где

$$R_{km} = 2\nabla_{[m} T_{k]} + \left[T_m , T_k\right]. \tag{6.92}$$

Вводя в уравнениях (6.92) матричные индексы (индексы слоя), получим структурное уравнение группы $O(3.1)$

$$R^a_{bkm} = 2\nabla_{[m} T^a_{|b|k]} + 2T^a_{c[m} T^c_{|b|k]}. \tag{6.93}$$

Легко видеть, что структурные уравнения группы вращении (6.93) совпадают со вторыми структурными уравнениями Картана (6.92) геометрии A_4. В данном случае величины T^a_{bk} и R^a_{bkm} преобразуются в группе вращении $O(3.1)$ по закону

$$T^{a'}_{b'k} = \Lambda^{a'}_a T^a_{bk} \Lambda^b_{b'} + \Lambda^{a'}_a \Lambda^a_{b'k} \tag{6.94}$$

и выступают как потенциалы калибровочного поля R^a_{bkm} группы вращений $O(3.1)$. При этом калибровочное поле группы $O(3.1)$ преобразуется как

$$R^{a'}_{b'km} = \Lambda^{a'}_{a} R^{a}_{bkm} \Lambda^{b}_{b'} \ . \tag{6.95}$$

Заметим, что структурными функциями группы вращений геометрии A_4 являются компоненты тензора кривизны R^a_{bkm}. Можно показать, что структурные функции R^a_{bkm} группы вращений $O(3.1)$ удовлетворяют тождествам Якоби

$$\nabla_{[n} R^{\ a}_{|b|km]} + R^{\ c}_{b[km} T^{\ a}_{|c|n]} - T^{\ c}_{b[n} R^{\ a}_{|c|km]} = 0 \ , \tag{6.96}$$

которые, как было показано в предыдущем разделе, являются одновременно вторыми тождествами Бианки пространства A_4. Введем дуальный тензор Римана

$$\overset{*}{R}_{ijkm} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\ sp}_{km} R_{ijsp} \ , \tag{6.97}$$

где ε^{sp}_{km} – полностью антисимметричный тензор Леви – Чивита. Тогда уравнения (6.96) могут быть записаны в следующем виде:

$$\nabla_n \overset{*}{R}{}^{akn}_{b} + \overset{*}{R}{}^{ckn}_{b} T^{a}_{cn} - T^{c}_{bn} \overset{*}{R}{}^{akn}_{c} = 0 \tag{6.98}$$

или, опуская матричные индексы, как

$$\nabla_n \overset{*}{R}{}^{kn} + \overset{*}{R}{}^{kn} T_n - T_n \overset{*}{R}{}^{kn} = 0 \ . \tag{6.99}$$

6.2.6. Структурные уравнения геометрии A_4 в виде расширенной, полностью геометризированной системы уравнений Эйнштейна – Янга – Миллса [22]

Звезды пронзят белым светом зной,
Кровью закат прольется,
Враг налетит как морской прибой.
Но над кумирами взметнется
Стяг краско-бело-голубой.

А. Эйнштейн считал, что одной из основных проблем единой теории поля является проблема геометризации тензора энергии-импульса материи, стоящего в правой части его уравнений. Эту проблему удается решить, если использовать в качестве пространства событий геометрию абсолютного параллелизма и структурные уравнения Картана этой геометрии. Действительно, свертывая уравнения (6.93), записанные в виде

$$R^{i}_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^{i}_{\ |j|m]} + 2T^{i}_{s[k} T^{s}_{\ |j|m]} = 0 \tag{6.100}$$

по индексам i и k, получим

$$R_{jm} = -2\nabla_{[i} T^{i}_{\ |j|m]} - 2T^{i}_{s[i} T^{s}_{\ |j|m]} \ . \tag{6.101}$$

Свертывая, далее, уравнения (6.101) с метрическим тензором g^{jm}, имеем

$$R = -2g^{im} (\nabla_{[i} T^{i}_{\ |j|m]} + T^{i}_{s[i} T^{s}_{\ |j|m]}) \ . \tag{6.102}$$

Образуя с помощью (6.101) и (6.102) тензор Эйнштейна

$$G_{jm} = R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R \ , \tag{6.103}$$

получим уравнения

$$R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R = \nu T_{jm} \ , \tag{6.104}$$

подобные уравнениям Эйнштейна, но с геометризированной правой частью, определяемой как

$$T_{jm} = \frac{2}{\nu} \left\{ (\nabla_{[i} T^{i}_{\ |j|m]} + T^{i}_{s[i} T^{s}_{\ |j|m]}) - \frac{1}{2} g_{jm} g^{pn} (\nabla_{[i} T^{i}_{\ |p|n]} + T^{i}_{s[i} T^{s}_{\ |p|n]}) \right\} \ . \tag{6.104а}$$

В выражения (6.104) и (6.104а) Г. Шипов впервые ввел коэффициент пропорциональности ν, который на самом деле при подстановке (6.104а) в (6.104) исчезает. На наш взгляд, данная эвристическая константа, введенная Шиповым «руками», является инородным «телом» его изящной теории. Сам же Г. Шипов в [22] отметил, что вовсе не обязательно, чтобы уравнения, описывающие состояние вакуума, содержали какие-либо константы, например, самое знаменитое вакуумное уравнение А. Эйнштейна $R_{km} = 0$ также не содержит никаких констант.

В Алгебре сигнатур константы могут появиться только как коэффициенты асимметрии между, например, Мужским (Активным, Дающим) – Женским (Пассивным, Принимающее) Началами, Добром – злом, Передним (Восточным) – Задним (Западным), Глубиной – Высотой, Левым – Правым. Асимметрия этих антиномий условна: просто одно временно находится в свободном состоянии, а другое – в связанном. Но без асимметрий проявленный мир был бы невозможен.

Фокус, проделанный Г. Шиповым в (6.104) и (6.104а) с появлением отсутствующей константы ν, очень похож на наш мир – он как бы есть и в то же время Его нет. То же в отношении асимметрии антиномий – они как бы есть, а на самом деле их нет.

В данном разделе мы решили полностью придерживаться текста [22], поэтому константа ν останется, но нужно будет строго следить, чтобы она не проявилась в определении какой-либо физической величины.

Введем обозначение

$$P_{jm} = \nabla_{[i} T^{i}_{\ |j|m]} + T^{i}_{s[i} T^{s}_{\ |j|m]} .$$

Тогда из равенства (6.104) следует

$$T_{jm} = -\frac{2}{\nu} (P_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} g^{pn} P_{pn}) \ . \tag{6.105}$$

Тензор (6.105) имеет как симметричную, так и антисимметричную по индексам j и m части, т. е.

$$T_{jm} = T_{(jm)} + T_{[jm]} . \tag{6.106}$$

Левая часть уравнений (5.106) всегда симметрична по индексам j и m, поэтому эти уравнения можно записать как

$$\begin{aligned} & R_{jm} - \frac{1}{2} g_{im} R = \nu T_{(jm)}, \\ & T_{[jm]} = \frac{1}{\nu} \left(-\nabla_i \Omega^{\cdot\cdot i}_{jm} - \nabla_m A_j - A_s \Omega^{\cdot\cdot s}_{jm} \right) = 0 , \end{aligned} \tag{6.107}$$

где

$$A_j = T^{i}_{\ ji} \ . \tag{6.108}$$

Второе соотношение в (6.107) можно понимать как уравнения, которым удовлетворяют поля кручения $\Omega^{\cdot\cdot i}_{jm}$, образующие тензор энергии-импульса (6.105). В случае, когда поле $T^{i}_{\ jk}$ антисимметрично по всем трем индексам, имеем

$$T_{ijk} = -T_{jik} = T_{jki} = -\Omega_{ijk} \ . \tag{6.109}$$

Для таких полей уравнения, описываемые вторым выражением (6.107), принимают простой вид, а именно

$$\nabla_i \Omega^{..i}_{jm} = 0 \ , \tag{6.110}$$

при этом тензор энергии-импульса (6.105) симметричен по индексам j и m и оказывается равным

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}(\Omega^{..i}_{sm}\Omega^{..s}_{ji} - \frac{1}{2}g_{jm}\Omega^{ji}_{s}\Omega^{..s}_{ji}) \ . \tag{6.111}$$

В самом деле, из первого уравнения (6.107) имеем

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}(R_{jm} - \frac{1}{2}g_{jm}R). \tag{6.112}$$

Используя равенства (6.101), (6.109) и (6.112), находим

$$R_{jm} = \Omega^{..i}_{sm}\Omega^{..s}_{ji}, \tag{6.113}$$

$$R = g^{jm}\Omega^{..i}_{sm}\Omega^{..s}_{ji} = \Omega^{.ji}_{s}\Omega^{..s}_{ji} \ . \tag{6.114}$$

Подставляя соотношения (6.113) и (6.114) в равенство (6.112), получим тензор энергии-импульса (6.111). Через поле (6.109) можно определить псевдовектор h_m следующим образом:

$$\Omega^{ijk} = \varepsilon^{ijkm}h_m, \qquad \Omega_{ijk} = \varepsilon_{ijkm}h^m, \tag{6.115}$$

где ε_{ijkm} – полностью антисимметричный символ Леви – Чивита. Через псевдовектор h_m тензор (6.111) запишется как

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}(h_j h_m - \frac{1}{2}g_{jm}h^i h_i) \ . \tag{6.116}$$

Подставляя соотношения (6.115) в уравнение (6.110), получим

$$h_{m,j} - h_{j,m} = 0 \ . \tag{6.117}$$

Эти уравнения имеют два решения:

$$\begin{aligned} &1)\ \textit{тривиальное} - h_m = 0, \\ &2)\ \textit{и}\ \ h_m = \psi_{,m}\ , \end{aligned} \tag{6.118}$$

где Ψ – псевдоскаляр.

Записывая тензор энергии-импульса (6.116) через этот псевдоскаляр, получим

$$T_{jm} = \frac{1}{\nu}(\Psi_{,j}\Psi_{,m} - \frac{1}{2}g_{jm}\Psi^{,i}\Psi_{,i}) \ . \tag{6.119}$$

Тензор (6.119) представляет собой тензор энергии импульса псевдоскалярного поля. Разложим тензор Римана R_{ijkm} на неприводимые части

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} + g_{i[k}R_{m]j} + g_{j[k}R_{m]i} + \frac{1}{3}Rg_{i[m}g_{k]j}\,, \tag{6.120}$$

где C_{ijkm} – тензор Вейля, второй и третий члены – бесследовая часть тензора Риччи R_{ij} и R – его след. Используя уравнения (6.104), записанные в виде

$$R_{jm} = \nu(T_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} T) \ , \tag{6.121}$$

перепишем соотношение (6.120) в виде

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} + 2\nu g_{[k(i} T_{j)m]} - \frac{1}{3} \nu T g_{i[m} g_{k]j} \ , \tag{6.122}$$

где T – след тензора (6.106). Введем теперь тензорный ток

$$J_{ijkm} = 2 g_{[k(i} T_{j)m]} - \frac{1}{3} T g_{i[m} g_{k]j} \tag{6.123}$$

и представим тензор (6.120) в виде суммы

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} + \nu J_{ijkm} \ . \tag{6.124}$$

Подставляя это соотношение в уравнения (6.100), получим

$$C_{ijkm} + 2\nabla_{[k} T_{|ij|m]} + 2 T_{is[k} T^{s}_{\ |j|m]} = -\nu J_{ijkm} . \tag{6.125}$$

Уравнения (6.125) представляют собой уравнения Янга – Миллса с геометризированным источником, определяемым согласно соотношению (6.123). В уравнениях (6.125) в качестве поля Янга – Миллса выступает тензор Вейля C_{ijkm}, а потенциалами поля Янга – Миллса являются коэффициенты вращения Риччи $T^{i}_{\ jk}$. Подставим теперь соотношение (6.124) во вторые тождества Бианки (6.96)

$$\nabla_{[n} R_{|ij|km]} + R^{s}_{\ j[km} T_{|is|n]} - T^{s}_{\ j[n} R_{|is|km]} = 0 . \tag{6.126}$$

В результате имеем уравнения движения

$$\nabla_{[n} C_{|ij|km]} + C^{s}_{\ j[km} T_{|is|n]} - T^{s}_{\ j[n} C_{|is|km]} = -\nu J_{nijkm} \tag{6.127}$$

для поля Янга – Миллса C_{ijkm}, при этом источник J_{nijkm} в этих уравнениях определяется через ток (6.123) следующим образом:

$$J_{nijkm} = \nabla_{[n} J_{|ij|km]} + J^{s}_{\ j[km} T_{|is|n]} - T^{s}_{\ j[n} R_{|is|km]} \ . \tag{6.128}$$

Используя геометризированные уравнения Эйнштейна (6.104) и Янга – Миллса (6.125), можно представить структурные уравнения Картана (6.77) и (6.93) в виде расширенной системы уравнений Эйнштейна – Янга – Миллса:

$$\nabla_{[k} e^{a}_{\ j]} + T^{i}_{\ [kj]} e^{a}_{\ i} = 0, \tag{6.129}$$

$$R_{jm} - \frac{1}{2} g_{jm} R = \nu \ T_{jm} , \tag{6.130}$$

$$C^{i}_{\ jkm} + 2\nabla_{[k} T^{i}_{\ |j|m]} + 2 T^{i}_{\ s[k} T^{s}_{\ |j|m]} = -\nu \ J^{i}_{\ jkm} , \tag{6.131}$$

в которых геометризированные источники T_{jm} и J_{ijkm} определяются согласно соотношениям (6.105) и (6.123). Для случая эйнштейновского вакуума уравнения (6.129) – (6.131) значительно упрощаются и принимают вид

$$\nabla_{[k} e^a_{j]} + T^i_{[k\,j]}\, e^a_i = 0, \tag{6.132}$$

$$R_{jm} = 0, \tag{6.133}$$

$$C^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} T^i_{|j|m]} + 2T^i_{s[k} T^i_{|j|m]} = 0\ . \tag{6.134}$$

Уравнения движения (6.127) поля Янга – Миллса C_{ijkm} в этом случае запишутся как

$$\nabla_{[n} C_{|ij|km]} + C^s_{j[km} T_{|is|n]} - T^s_{j[n} C_{|is|km]} = 0\,. \tag{6.135}$$

Уравнения (5.129) и (5.131) могут быть записаны в матричном виде

$$\nabla_{[k} e^a_{m]} - e^b_{[k} T^a_{|b|m]} = 0\ ,$$

$$C^a_{bkm} + 2\nabla_{[k} T^a_{|b|m]} + 2T^a_{f[k} T^f_{|b|m]} = -\nu J^a_{bkm}\ \ , \tag{6.136}$$

где ток

$$J^a_{bkm} = 2g_{[k}{}^{(a} T_{b)m]} - \frac{1}{3} T g^a_{[m}\, g_{k]b} \tag{6.137}$$

определяется соотношением

$$T^a_m = \frac{1}{\nu}\left(R^a_m - \frac{1}{2} g^a_m R \right),$$

m = 0, 1, 2, 3; a = 0, 1, 2, 3.

Записывая уравнения (6.127) в матричном виде, имеем

$$\nabla_{[n} C^a_{|b|km]} + C^c_{b[km} T^a_{|c|n]} - T^c_{b[n} C^a_{|a|km]} = -\nu\ J^a_{nbkm}\ , \tag{6.138}$$

где

$$J^a_{nbkm} = \nabla_{[n} J^a_{|b|km]} + J^c_{b[km} T^a_{|c|n]} - T^c_{b[n} J^a_{|c|km]}\,. \tag{6.139}$$

Опуская матричные индексы в матричных уравнениях, имеем

$$\nabla_{[k} e_{m]} - e_{[k} T_{m]} = 0\ , \tag{6.140}$$

$$C_{km} + 2\nabla_{[k} T_{m]} - \left[T_k, T_m\right] = -\nu\, J_{km}\ , \tag{6.141}$$

$$\nabla_n \overset{*}{C}{}^{kn} + [\overset{*}{C}{}^{kn}, T_n] = -\nu\, \overset{*}{J}{}^k, \tag{6.142}$$

где дуальные матрицы $\overset{*}{C}{}^{kn}$ и $\overset{*}{J}{}^k$ определяются как

$$\overset{*}{C}{}^{kn} = \varepsilon^{knij} C_{ij}, \tag{6.143}$$

$$\overset{*}{J}{}^{nk} = \varepsilon^{nkim} J_{im}, \tag{6.144}$$

$$\overset{*}{J}{}^k = \{\nabla_n \overset{*}{J}{}^{kn} + [\overset{*}{J}{}^{kn}, T_n]\}. \tag{6.145}$$

В случае эйнштейновского вакуума справедливы соотношения

$$R_{ijkm} = C_{ijkm} = \overset{*}{R}_{ijkm} = C_{ijkm}\ , \tag{6.146}$$

поэтому уравнения (6.141) и (6.142) упрощаются и принимают вид

$$C_{km} + 2\nabla_{[k} T_{m]} - [T_k, T_m] = 0, \tag{6.147}$$

$$\nabla_n C^{kn} + \left[C^{kn}, T_n\right] = 0. \tag{6.148}$$

Таким образом, структурные уравнения геометрии A_4, записанные в виде (6.129) – (6.131), представляют собой расширенную систему уравнений Эйнштейна – Янга – Миллса с калибровочной группой трансляций T_4, действующей в базе x^i и имеющей структурные уравнения (6.129), и с калибровочной группой вращений $O(3.1)$, действующей в слое e^i_a и имеющей структурные уравнения в виде геометризированных уравнений (6.130) и (6.131).

6.2.7. Уравнения геодезических пространства A_4 [22]

Уравнения геодезических геометрии абсолютного параллелизма могут быть получены из условия параллельного переноса вектора

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{6.149}$$

по связности геометрии A_4

$$\Delta^{\ i}_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk} = e^i_a e^a_{j,\,k}. \tag{6.150}$$

Действительно, специализируем тетраду e^i_a таким образом, чтобы вектор e^i_0 совпадал с касательной к мировой линии, т. е.

$$e^i_0 = u^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{6.151}$$

Из соотношения (6.43) для вектора (6.151) имеем

$$\overset{*}{\nabla}_k u^i = u^i_{,\,k} + \Delta^i_{jk} u^j = 0$$

или

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} u^i + T^i_{jk} u^j = 0\ . \tag{6.152}$$

Умножая это соотношение на $u^k = dx^k/ds$, получим

$$\frac{\partial u^i}{\partial s} + \Gamma^i_{jk} u^i u^k + T^i_{jk} u^j u^k = 0, \tag{6.153}$$

или, учитывая равенство (6.149):

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + T^i_{jk} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{6.154}$$

Эти четыре уравнения (i = 0, 1, 2, 3) представляют собой уравнения геодезической линии пространства A_4. Они также являются уравнениями движения начала O тетрады e^i_a. Поскольку в уравнениях (6.154) коэффициенты вращения Риччи $T^i{}_{jk}$ имеют как симметричную, так и антисимметричную части по индексам j и k:

$$T^i_{jk} = T^i_{(jk)} + T^i_{[jk]} = -\Omega^{..i}_{jk} + g^{im}\left(g_{js}\Omega^{..s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}\right), \tag{6.155}$$

$$T^i_{(jk)} = g^{im}\left(g_{js}\Omega^{..s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}\right), \tag{6.156}$$

$$T^i_{[jk]} = -\Omega^{..i}_{jk}, \tag{6.157}$$

то уравнение (6.154) можно записать как

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + T^i_{(jk)} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{6.158}$$

Учитывая структуру равенства (6.156), запишем его в виде

$$T^i_{(jk)} = g^{im}\left(g_{js}\Omega^{..s}_{mk} + g_{ks}\Omega^{..s}_{mj}\right) = 2g^{im}\Omega_{m(jk)}, \tag{6.159}$$

следовательно, уравнения геодезических пространства A_4 можно представить как

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} + 2g^{im}\Omega_{m(jk)} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0. \tag{6.160}$$

Для слагаемых в равенстве (6.159) можно ввести следующие обозначения:

$$\Omega^i_{k.j} = g^{im} g_{ks}\Omega^{..a}_{jm},$$
$$\Omega^i_{.jk} = g^{im} g_{ks}\Omega^{..s}_{mj},$$

тогда тензор конторсии T^i_{jk} пространства A_4 запишется как

$$T^i_{jk} = -\Omega^{..i}_{jk} - \Omega^i_{k.j} + \Omega^i_{.jk}, \tag{6.161}$$

причем

$$-\Omega^i_{k.j} = \Omega^i_{.jk},$$

поэтому

$$T^i_{jk} = -\Omega^{..i}_{jk} + 2\Omega^i_{.jk}. \tag{6.162}$$

Ковариантный дифференциал от произвольного вектора v^i относительно связности (6.150) при параллельном переносе из точки x^i в точку $x^i + dx^i$ запишется как

$$\delta v^i = dv^i + \Delta^i_{jk}\, dx^j = 0. \tag{6.163}$$

Если в произвольной точке x^i пространства A_4 мы имеем два линейных элемента δx^i и dx^i и производим параллельное смещение dx^i вдоль элемента dx^i, то для конечной точки смещения получим

$$x^i + dx^i + \delta x^i - \Delta^i_{jk}\, dx^j = x^i + dx^i + \delta x^i + d\delta x^i . \tag{6.164}$$

С другой стороны, параллельное смещение вектора dx^i вдоль вектора δx^i дает

$$x^i + \delta x^i + dx^i - \Delta^i_{jk}\, dx^k\, \delta x^j = x^i + \delta x^i + dx^i + \delta dx^i . \tag{6.165}$$

Вычитая из соотношения (5.164) равенство (6.165), имеем

$$\begin{aligned} d\delta x^i - \delta\, d\, x^i &= -\left(\Delta^i_{jk}\,\delta x^k\, dx^j + \Delta^i_{jk}\, dx^k\, \delta x^j\right) = \\ &= -\left(\Delta^i_{jk} - \Delta^i_{k\,j}\right)\delta x^k\, dx^j = -2\Delta^{\;i}_{[jk]}\delta x^k\, dx^j = \\ &= 2\Omega^{\cdot\cdot s}_{jk}\,\delta x^k\, dx^j = -2\Omega^{\cdot\cdot s}_{jk}\,\delta x^j\, dx^k . \end{aligned} \tag{6.166}$$

Рассмотрим теперь вариацию интеграла

$$\int_a^b L\left(x^i, u^i\right) ds, \tag{6.167}$$

где u^i определено согласно соотношению (6.149). Запишем равенство (6.166) в виде

$$\delta\, dx^i = d\delta\, x^i + 2\Omega^{\cdot\cdot s}_{jk}\,\delta\, x^j\, dx^k , \tag{6.168}$$

тогда в каждой точке экстремали имеем

$$\delta\, u^i = \delta\,\frac{dx^i}{ds} = \frac{d}{ds}\delta\, x^i + 2\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk}\,\delta\, x^j\,\frac{dx^k}{ds}. \tag{6.169}$$

Используя обычную вариационную процедуру для интеграла (6.167), находим

$$\int_a^b \delta L\left(x^i, u^i\right) ds = \int_a^b \left(L\left(x^i + \delta\, x^i,\; u^i + \delta\, u^i\right) - L\left(x^i, u^i\right)\right) ds = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\,\delta\, x^i + \frac{\partial L}{\partial u^i}\,\delta\, u^i\right) ds = 0 . \tag{6.170}$$

Подставляя сюда соотношение (6.169), получим

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i}\,\partial x^i + \frac{\partial L}{\partial u^i}\frac{d}{ds}\,\partial x^i + \frac{\partial L}{\partial u^i}\; 2\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk}\,\partial x^j\, u^k\right) ds = 0.$$

Производя интегрирование второго члена в этом соотношения по частям находим

$$\int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial u^i} + 2\Omega^{\cdot\cdot j}_{ik}\,\frac{\partial L}{\partial u^i}\; u^k\right) dx^i = 0$$

или, ввиду произвольности ∂x^i, получим

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial u^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} + 2\Omega^{\cdot\cdot j}_{k\,i}\,\frac{\partial L}{\partial u^i}\; u^k = 0 . \tag{6.171}$$

Пусть теперь

$$L = (g_{ik}\, u^i\, u^k)^{1/2}. \tag{6.172}$$

В более общем случае следовало бы оперировать с лагражианом вида

$$L = \sqrt{\eta_{ab} e_i^{(a)} e_j^{(b)} u^i u^j} = \sqrt{\sum_{k=1}^{16} c_{ij}^{(k)} u^i u^j}\,, \tag{6.172a}$$

с учетом всех сигнатур (6.14в).

причем вдоль экстремали $L = 1$ в силу соотношения

$$g_{ik}\, u^i\, u^k = u^i\, u_i = 1.$$

Подставляя лагранжиан (6.172) в уравнения (6.171), получим

$$g_{mi} \frac{du^i}{ds} + \Gamma_{mjk}\, u^j u^k + 2\Omega_{mj}^{..s}\, g_{sk}\, u^k u^j = 0\,. \tag{6.173}$$

Умножая это соотношение на g^{im}, находим

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{k\,j}\, u^j u^k + 2g^{im} g_{ks} \Omega_{mj}^{..s}\, u^j u^k = 0$$

или

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma^i_{k\,j}\, u^j u^k + 2g^{im} \Omega_{m(jk)}^{\cdot}\, u^j u^k = 0\,. \tag{6.174}$$

Таким образом, мы получили уравнения геодезических из вариационного принципа, записанные в виде уравнений (6.160). Рассмотрим теперь уравнения, которые описывают изменение ориентации репера e^i_a при движении ее согласно уравнениям геодезических (6.174). Для этого перепишем второе уравнение (6.55) в виде

$$\partial_k\, e^i_a + \Delta^i_{jk}\; e^j_a = 0$$

или как

$$de^i_{\ a} + \Delta^{\ i}_{\ jk}\, e^{\ j}_{\ a}\, dx^k = 0\,. \tag{6.175}$$

Поделив эти уравнения на ds, получим

$$\frac{de^i_a}{ds} + \Delta^i_{jk}\, e^j_a \frac{dx^k}{ds} = 0\,. \tag{6.176}$$

Далее, вычисляя вторую производную $d^2 e^i_{\ a}/ds^2$, имеем

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{de^i_a}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial e^i_a}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\right) = \frac{\partial^2 e^i_a}{\partial x^m \partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial s}\frac{\partial x^m}{ds} + \frac{\partial e^i_a}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^k}{ds^2}\,. \tag{6.177}$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2 e^i_a}{\partial x^m \partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^m}\left(-\Delta^i_{ak}\right) = \Delta^i_{jk,m}\, e^j_a - \Delta^i_{sk}\left(-\Delta^s_{jm}\, e^j_a\right) = \left(-\Delta^i_{jk,m} + \Delta^i_{sk}\,\Delta^s_{jm}\right) e^j_a$$

и

$$\frac{\partial e^i_a}{\partial x^k}\frac{d^2 x^k}{ds^2} = \Delta^i_{js}\,\Delta^s_{km}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds}\, e^j_a\,,$$

то

$$\frac{d^2 e^i_a}{ds^2} + \left(\Delta^i_{jk,m} - \Delta^i_{sk}\,\Delta^s_{jm} - \Delta^i_{js}\,\Delta^s_{km}\right)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds}\, e^j_a = 0\,. \tag{6.178}$$

Подставляя сюда сумму (6.150), получим

$$\frac{d^2 e^i_a}{ds^2} + (\Gamma^i_{jk,m} + T^i_{jk,m} - \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jm} - \Gamma^i_{sk}T^s_{jm} - T^i_{sk}\Gamma^s_{jm} -$$
$$- T^i_{sk}T^s_{jm} - \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{km} - T^i_{js}\Gamma^s_{km} - \Gamma^i_{js}T^s_{km} - T^i_{js}T^s_{km})\,\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds}e^j_a = 0\,. \tag{6.179}$$

Шесть независимых уравнений (6.179) (для трех углов Эйлера и трех псевдоевклидовых углов) описывают измерение ориентации тетрады $e^i{}_a$ при движении ее начала O согласно уравнениям геодезических (6.174).

В пространствах A_4, в которых метрика является плоской

$$g_{ik} = \eta_{ik} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)\,, \tag{6.180}$$

символы Кристоффеля $\Gamma^i{}_{js}$ обращаются в нуль и уравнения (6.179) принимают вид

$$\frac{d^2 e^i_a}{ds^2} + \left(T^i_{jk,\,m} - T^i_{sk}T^s_{jm} - T^i_{js}T^s_{km}\right)\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^m}{ds}e^j_a = 0\,, \tag{6.181}$$

а уравнения геодезических (6.153) запишутся как

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + T^i{}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0\,. \tag{6.182}$$

Введем теперь тензор четырехмерной угловой скорости вращения тетрады $e^i{}_a$:

$$\Omega_{ij} = T_{ijk}\frac{dx^k}{ds} = -\frac{de_{ia}}{ds}e^a_j = \frac{de_{ja}}{ds}e^a_i \tag{6.183}$$

со свойствами симметрии

$$\Omega_{ij} = -\,\Omega_{ji}\,, \tag{6.184}$$

определяемыми симметрией (6.61), которой удовлетворяют коэффициенты вращения Риччи.

Используя соотношение (6.183), запишем уравнения (6.181) и (6.182) в виде

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Omega^i_j\frac{dx^j}{ds} = 0\,, \tag{6.185}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega^{\mathrm{i}}_{\mathrm{j}}}{\mathrm{ds}} - \Omega^i_{j,m}\frac{dx^m}{ds} - \Omega^i_s\Omega^s_j - \Omega^i_j\left(\frac{dx_k}{ds}\right)_{,m}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0\,. \tag{6.186}$$

Кососимметрическая матрица (6.184) может быть представлена в виде

$$\Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{01} & \Omega_{02} & \Omega_{03} \\ \Omega_{10} & 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{20} & \Omega_{21} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{30} & \Omega_{31} & \Omega_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.187}$$

Дадим физическую интерпретацию компонентам матрицы (6.187). Для этого рассмотрим уравнения (6.185)

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \Omega_{ij}\frac{dx^j}{ds} = 0\,. \tag{6.188}$$

При условии (6.180) эти уравнения можно представить как

$$\frac{du_i}{ds_0}+\Omega_{ij}\frac{dx^j}{ds_0}=0\ , \qquad (6.189)$$

где

$$ds_0=(\eta_{ik}\,dx^i\,dx^k)^{?} \qquad (6.190)$$

– псевдоевклидова метрика и $u_i = dx_i / ds_0$.

Представим уравнения (6.189) в виде

$$\frac{du_i}{ds_0}=-T_{i(jk)}\frac{dx^j}{ds_0}\frac{dx^k}{ds_0}\ , \qquad (6.191)$$

где симметричная по индексам j и k часть T определяется согласно (6.156). Считая, что движение, согласно уравнениям (6.191), является нерелятивистским ($v/c >> 1$), запишем трехмерную часть этих уравнений как

$$\frac{du_\alpha}{ds_0}=-T_{\alpha(0k)}\frac{dx^0}{ds_0}\frac{dx^k}{ds_0}-2T_{\alpha(\beta k)}\frac{dx^\beta}{ds_0}\frac{dx^k}{ds_0} \qquad (6.192)$$

или, учитывая соотношение (5.183), в виде

$$\frac{du_\alpha}{ds_0}=-\Omega_{\alpha 0}\frac{dx^0}{ds_0}-2\Omega_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds_0}\ . \qquad (6.193)$$

Поскольку в нерелятивистском приближении

$$ds_0 = cdt = dx_0 \quad u_\alpha = v_\alpha /c,$$

то уравнения (6.193) запишутся как

$$\frac{dv_\alpha}{dt}=-c^2\Omega_{\alpha o}-2c^2\Omega_{\alpha\beta}\frac{1}{c}\frac{dx^\beta}{dt}. \qquad (6.194)$$

Из классической механики известно, что нерелятивистские уравнения движения начала O трехмерной ускоренной системы отсчета под действием одних только сил инерции имеют вид

$$\frac{dm\vec{v}}{dt}=m(-\vec{W}+[\vec{v}\,\vec{\omega}])\ ,$$

где $\vec{W}$ – вектор поступательного ускорения, а $\vec{\omega}$ – вектор трехмерной угловой скорости вращения ускоренной системы отсчета. Деля обе части этого уравнения на массу m и записывая эти уравнения в виде

$$\frac{dv_a}{dt}=-W_{\alpha 0}+2\omega_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{dt}, \qquad (6.195)$$

где

$$\vec{W}=(W_{10},\ W_{20},\ W_{30}),$$

$$\omega_{\alpha\beta}=-\omega_{\beta\alpha}=-\begin{pmatrix}0 & -\omega_3 & \omega_2\\ \omega_3 & 0 & -\omega_1\\ -\omega_2 & \omega_1 & 0\end{pmatrix}, \qquad (6.196)$$

$$\vec{\omega}=(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\ ),$$

сравнивая (6.195) с уравнениями (6.194), получим

$$\Omega_{10} = W_1/c^2\,; \quad \Omega_{20} = W_2/c^2\,; \quad \Omega_{30} = W_3/c^2\,;$$

$$\Omega_{12} = -\omega_3/c\,; \quad \Omega_{13} = \omega_2/c\,; \quad \Omega_{23} = -\omega_1/c\,.$$

Поэтому матрица (6.187) в нашем случае имеет вид

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{c^2}\begin{pmatrix} 0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ W_1 & 0 & -c\omega_3 & c\omega_2 \\ W_2 & c\omega_3 & 0 & -c\omega_1 \\ W_3 & -c\omega_2 & c\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.197}$$

Из этой матрицы видно, что четырехмерное вращение тетрады $e^i{}_a$, вызываемое кручением пространства A_4, порождает поля инерции, связанные с поступательными и вращательными ускорениями.

6.2.8. Структурные уравнения правой и левой геометрии A_4 [22]

Можно рассмотреть три варианта геометрии абсолютного параллелизма:

1. Геометрия A_4, у которой отличны от нуля тензор Римана $R^i{}_{jkm}$ и кручение $\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk}$. Структурные уравнения Картана в этом случае имеют вид

$$\nabla_{[k}e^a_{j]} + T^i_{[k\,j]}e^a_i = 0\,,$$

$$R^i_{jkm} + 2\nabla_{[k}T^i_{|j|m]} + 2T^i_{s[k}T^s_{|j|m]} = 0\,. \tag{6.198}$$

2. Геометрия A_4, у которой тензор Римана $R^i{}_{jkm}$ равен нулю, а кручение $\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk}$ отлично от нуля. В этом случае структурные уравнения Картана запишутся как

$$\nabla_{[k}e^a_{j]} + T^i_{[kj]}e^a_i = 0\,,$$

$$\nabla_{[k}T^i_{|j|m]} + T^i_{s[k}T^s_{|j|m]} = 0\,. \tag{6.199}$$

3. Геометрия A_4, у которой тензор Римана $R^i{}_{jkm}$ и некоординатное кручение $\Omega^{\cdot\cdot i}_{jk}$ равны нулю, при этом структурные уравнения Картана геометрии совпадают со структурными уравнениями псевдоевклидова пространства E_4, принимая вид

$$\overset{0}{\nabla}_{[k}\overset{0}{e}{}^a_{j]} + \overset{0}{T}{}^i_{[k\,j]}\overset{0}{e}{}^a_i = 0\,,$$

$$\overset{0}{\nabla}_{[k}\overset{0}{T}{}^i_{|j|m]} + \overset{0}{T}{}^i_{s[k}\overset{0}{T}{}^s_{|j|m]} = 0\,, \tag{6.200}$$

где тетрада $\overset{0}{e}{}^a_i$ определяет «координатное кручение»:

$$\overset{0}{\Omega}{}^{\cdot\cdot i}_{jk} = \overset{0}{e}{}^i_a\overset{0}{e}{}^a_{[k,\,j]} = \frac{1}{2}e^i_a(\overset{0}{e}{}^a_{k,\,j} - \overset{0}{e}{}^a_{j,\,k})\,. \tag{6.201}$$

Поскольку в псевдоевклидовом пространстве группы T_4 и $O(3.1)$ действуют глобально и ее внутренняя геометрия тривиальна, то, например, в декартовых координатах $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y, x^3 = z$ структурные уравнения (6.200) обращаются в тождества

$$0 \equiv 0, \tag{6.202}$$

$$0 \equiv 0. \tag{6.203}$$

Если перейти теперь к сферическим координатам

$$x^0 = ct,\ x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi,$$

то мы получим уравнения (6.200) – (6.201), в которые входят:

а) компоненты «координатной» тетрады:

$$\begin{gathered} \overset{0}{e}{}^{(0)}_0 = \overset{0}{e}{}^{(1)}_1 = 1,\ \ \overset{0}{e}{}^{(2)}_2 = r\ ,\ \ \overset{0}{e}{}^{(3)}_3 = \mathrm{r}\sin\theta, \\ \overset{0}{e}{}^0_{(0)} = \overset{0}{e}{}^1_{(1)} = 1,\ \ \overset{0}{e}{}^2_{(2)} = \frac{1}{r},\quad \overset{0}{e}{}^3_{(3)} = \frac{1}{r\sin\theta}; \end{gathered} \tag{6.204}$$

б) компоненты «координатного кручения»

$$\overset{0}{\Omega}{}_{21}^{..2} = \overset{0}{\Omega}{}_{31}^{..3} = -(2r)^{-1},\quad \overset{0}{\Omega}{}_{32}^{..3} = -\frac{1}{2}ctg\theta; \tag{6.205}$$

в) компоненты коэффициентов вращения Риччи

$$\begin{gathered} \overset{0}{T}{}^1_{22} = r\ ,\quad \overset{0}{T}{}^1_{33} = r\sin^2\theta\ ,\quad \overset{0}{T}{}^2_{33} = \sin\theta\cos\theta\ , \\ \overset{0}{T}{}^2_{12} = \overset{0}{T}{}^3_{13} = -\frac{1}{r},\quad \overset{0}{T}{}^3_{23} = \text{-ctg}\theta\ . \end{gathered} \tag{6.206}$$

Используя формулы

$$\overset{0}{g}_{ik} = \eta_{ab}\overset{0}{e}{}^a_i\overset{0}{e}{}^b_k,\quad \eta_{ab} = \eta^{ab} = diag(1 -1 -1 -1)$$

находим компоненты метрического тензора

$$\overset{0}{g}_{00} = \overset{0}{g}_{11} = 1,\quad \overset{0}{g}_{22} = -r\ ,\quad \overset{0}{g}_{33} = -r^2\sin^2\theta\ ,$$

метрику

$$ds_0^2 = \overset{0}{g}_{ij}dx^i dx^j = c^2dt^2 - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right)$$

и компоненты символов Кристоффеля

$$\begin{gathered} \overset{0}{\Gamma}{}^1_{33} = -r\ \sin^2\theta\ ,\quad \overset{0}{\Gamma}{}^1_{22} = -r,\quad \overset{0}{\Gamma}{}^2_{12} = \overset{0}{\Gamma}{}^3_{13} = \frac{1}{r}, \\ \overset{0}{\Gamma}{}^2_{33} = \text{-}\sin\theta\cos\theta\ ,\quad \overset{0}{\Gamma}{}^3_{23} = ctg\theta\ . \end{gathered} \tag{6.207}$$

Таким образом, в псевдоевклидовой геометрии A_4 при уклонении от декартовых координат вместо тождеств (6.202) и (6.203) появляются «координатные структурные уравнения» (6.200).

Предположим теперь, что исходное псевдоевклидово пространство A_4 деформируется непрерывным образом (например, с помощью конформных преобразований) в пространство A_4 с отличным от нуля динамическим полем кручения и обладающим структурными уравнениями (6.199). При этом можно различать правые

$$\overset{+}{\Omega}{}^{..i}_{jk} = r^i_a r^a_{[k,j]} = \frac{1}{2} r^i_a \left(r^a_{k,j} - r^a_{j,k} \right) \tag{6.208}$$

и левые

$$\overset{-}{\Omega}{}^{..i}_{jk} = l^i_a l^a_{[k,j]} = \frac{1}{2} l^i_a \left(l^a_{k,j} - l^a_{j,k} \right) \tag{6.209}$$

поля кручения. В этих уравнениях через $r^i{}_a$ и $l^i{}_a$ обозначены правые и левые тетрады соответственно. Под правой тетрадой $r^i{}_a$ мы будем подразумевать такую тетраду $\overset{+}{e}{}^i_a$, у которой при вращении трехмерной пространственной части от оси x к оси y вектор угловой скорости вращения направлен вдоль оси z, при этом вращение происходит против часовой стрелки, если смотреть с той стороны, куда направлен вектор z. Так, например, матрица четырехмерных вращений (6.197) для правой тетрады имеет вид

$$\overset{+}{\Omega}_{ij} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & -W_1 & -W_2 & -W_3 \\ W_1 & 0 & -c\omega_3 & c\omega_2 \\ W_2 & c\omega_3 & 0 & -c\omega_1 \\ W_3 & -c\omega_2 & c\omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.210}$$

в то время как для левых вращений имеем

$$\overset{-}{\Omega}_{ij} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & W_1 & W_2 & W_3 \\ -W_1 & 0 & c\omega_3 & -c\omega_2 \\ -W_2 & -c\omega_3 & 0 & c\omega_1 \\ -W_3 & c\omega_2 & -c\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.211}$$

Отсюда видно, что имеет место соотношение

$$\overset{+}{\Omega}_{ij} = -\overset{-}{\Omega}_{ij}. \tag{6.212}$$

Учитывая равенство (6.183) и соотношение (6.212), получим

$$\overset{+}{T}{}^i_{jk} = -\overset{-}{T}{}^i_{jk}. \tag{6.213}$$

Поскольку метрический тензор g_{ik} определяется как правой, так и левой тетрадой одинаковым образом

$$g_{ik} = \eta_{ab} r^a{}_i r^b{}_k = \eta_{ab} l^a{}_i l^b{}_k , \tag{6.214}$$

то из определения

$$T^i_{jk} = -\Omega^{..i}_{jk} + g^{im} \left(g_{js} \Omega^{..s}_{mk} + g_{ks} \Omega^{..s}_{mj} \right) \tag{6.215}$$

следует, что компоненты (6.208) и (6.209) правых и левых полей кручения отличаются знаками

$$\overset{+}{\Omega}{}^{..i}_{ij} = -\overset{-}{\Omega}{}^{..i}_{ij} . \tag{6.216}$$

Разделяя поля кручения на левые и правые, мы тем самым расщепляем группу трансляции T_4 на группу правых и левых $\overset{+}{T}_4$ и левых $\overset{-}{T}_4$ трансляций, а группу вращений $O(3.1)$ – на группу правых $SO^+(3.1)$ и левых $SO^-(3.1)$ вращений. Структурные уравнения Картана геометрии A_4 , которые преобразуются с использованием непрерывных преобразований в группах T_4 и $SO^+(3.1)$, будем обозначать как

$$\begin{aligned} &\nabla_{[k} \overset{+}{e}{}^a_{j]} + \overset{+}{T}{}^i_{[kj]} \overset{+}{e}{}^a_i = 0, \\ &\nabla_{[k} \overset{+}{T}{}^i_{|j|m]} + \overset{+}{T}{}^i_{s[k} \overset{+}{T}{}^s_{|j|m]} = 0. \end{aligned} \tag{6.217}$$

Соответственно уравнения

$$\begin{aligned} &\nabla_{[k} \overset{-}{e}{}^a_{j]} + \overset{-}{T}{}^i_{[kj]} \overset{-}{e}{}^a_i = 0, \\ &\nabla_{[k} \overset{-}{T}{}^i_{|j|m]} + \overset{-}{T}{}^i_{s[k} \overset{-}{T}{}^i_{|j|m]} = 0, \end{aligned} \tag{6.218}$$

преобразуются непрерывным образом в группах T_4 и $SO(3.1)$. Понятно, что дискретное преобразование инверсии позволяет преобразовать правые уравнения (6.217) в левые уравнения (6.218), и наоборот. Свойство (6.216) геометрии A_4 позволяет производить «расщепление» пустой псевдоевклидовой геометрии на правую и левую геометрии

$$\overset{0}{\Omega}{}^{\cdot\cdot i}_{jk} = \overset{+}{\Omega}{}^{\cdot\cdot i}_{jk} + \overset{-}{\Omega}{}^{\cdot\cdot i}_{jk} = 0, \tag{6.219}$$

кручение которых отлично от нуля. Это свойство оказывается очень полезным при описании рождения материи из «НИЧЕГО». Расщепляя теперь структурные уравнения Картана (6.198) на правые и левые, имеем

$$\begin{aligned} &\nabla_{[k} \overset{+}{e}{}^a_{j]} + \overset{+}{T}{}^i_{[k\,j]} \overset{+}{e}{}^a_i = 0. \\ &\overset{+}{R}{}^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} \overset{+}{T}{}^i_{|j|m]} + 2\overset{+}{T}{}^i_{s[k} \overset{+}{T}{}_{|j|m]} = 0; \end{aligned} \tag{6.220}$$

$$\begin{aligned} &\nabla_{[k} \overset{-}{e}{}^a_{j]} + \overset{-}{T}{}^i_{[k\,j]} \overset{-}{e}{}^a_i = 0, \\ &\overset{-}{R}{}^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} \overset{-}{T}{}^i_{|j|m]} + 2\overset{-}{T}{}^i_{s[k} \overset{-}{T}{}_{|j|m]} = 0. \end{aligned} \tag{6.221}$$

Записывая структурные уравнения Картана в виде расширенных правых и левых систем уравнений Эйнштейна – Янга – Милса, получим

$$\nabla_{[k} \overset{+}{e}{}^a_{j]} + \overset{+}{T}{}^i_{[k\,j]} \overset{+}{e}{}^a_i = 0, \tag{6.222}$$

$$\overset{+}{\mathrm{R}}_{\mathrm{jm}} - \frac{1}{2} \mathrm{g}_{\mathrm{jm}} \overset{+}{\mathrm{R}} = \nu \overset{+}{T}_{jm}, \tag{6.223}$$

$$\overset{+}{C}{}^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} \overset{+}{T}{}^{\,i}_{\,|j|m]} + 2\overset{+}{T}{}^{\,i}_{\,s[k} \overset{+}{T}{}_{\,|j|m]} = -\nu \overset{+}{J}{}^{\mathrm{i}}_{jkm}. \tag{6.224}$$

$$\nabla_{[k} \overset{-}{e}{}^a_{j]} + \overset{-}{T}{}^i_{[k\,j]} \overset{-}{e}{}^a_i = 0, \tag{6.225}$$

$$\overset{-}{\mathrm{R}}_{\mathrm{jm}} - \frac{1}{2} \mathrm{g}_{\mathrm{jm}} \overset{-}{\mathrm{R}} = \nu \overset{-}{T}_{jm}, \tag{6.226}$$

$$\overset{-}{C}{}^i_{jkm} + 2\nabla_{[k} \overset{-}{T}{}^i_{|j|m]} + 2\overset{-}{T}{}^i_{s[k} \overset{-}{T}{}_{|j|m]} = -\nu \overset{-}{J}{}^{\mathrm{i}}_{jkm}. \tag{6.227}$$

На этом мы завершаем последовательное цитирование работы «Теория физического вакуума». Далее мы еще будем обращаться к данной работе, но уже выборочно.

Для более детального знакомства с теорией Г. И. Шипова необходимо обратится к первоисточнику [22].