## 8.2. Определение плотности распределения вероятности производной *n*-го порядка *n* раз дифференцируемого, случайного, стационарного процесса (*)

Говорить только правду, одну только правду, но не всю правду. Я не знаю кому принадлежат эти слова, Б-Г Знает, но это можно отнести к девизу Каболы. Это ответ и на высказывание существа под именем Талейран: «Есть маленькая ложь, есть большая ложь, и есть политика».

*Правда – один из столпов на котором стоит Мир. Лжец разрушает основу мира. Потому запретили мудрецы говорить ученикам неверно, кроме трех случаев. И сказали мудрецы (Талмуд, Санэдрин, 97а) о том месте, где были осторожны в высказывании правды – там смерть не имела власти [130].*

Перед выводом уравнения Шредингера мы вынуждены привести здесь две чисто технических статьи, без которых вывод этого уравнения был бы невозможен. Первая статья, посвященная определению плотности распределения вероятности производной *n*-го порядка *n* раз дифференцируемого, случайного стационарного процесса. Эта статья является разработкой автора настоящего исследования [52]. Вторая статья «Преобразование Фурье» позаимствована в [32].

На первый взгляд материал этого пункта кажется выпадающим из общего контекста настоящего исследования и касается только частного вопроса теории вероятности: «определение способа нахождения плотности распределения вероятности (ПРВ) производной стационарного в узком смысле случайного процесса при из-

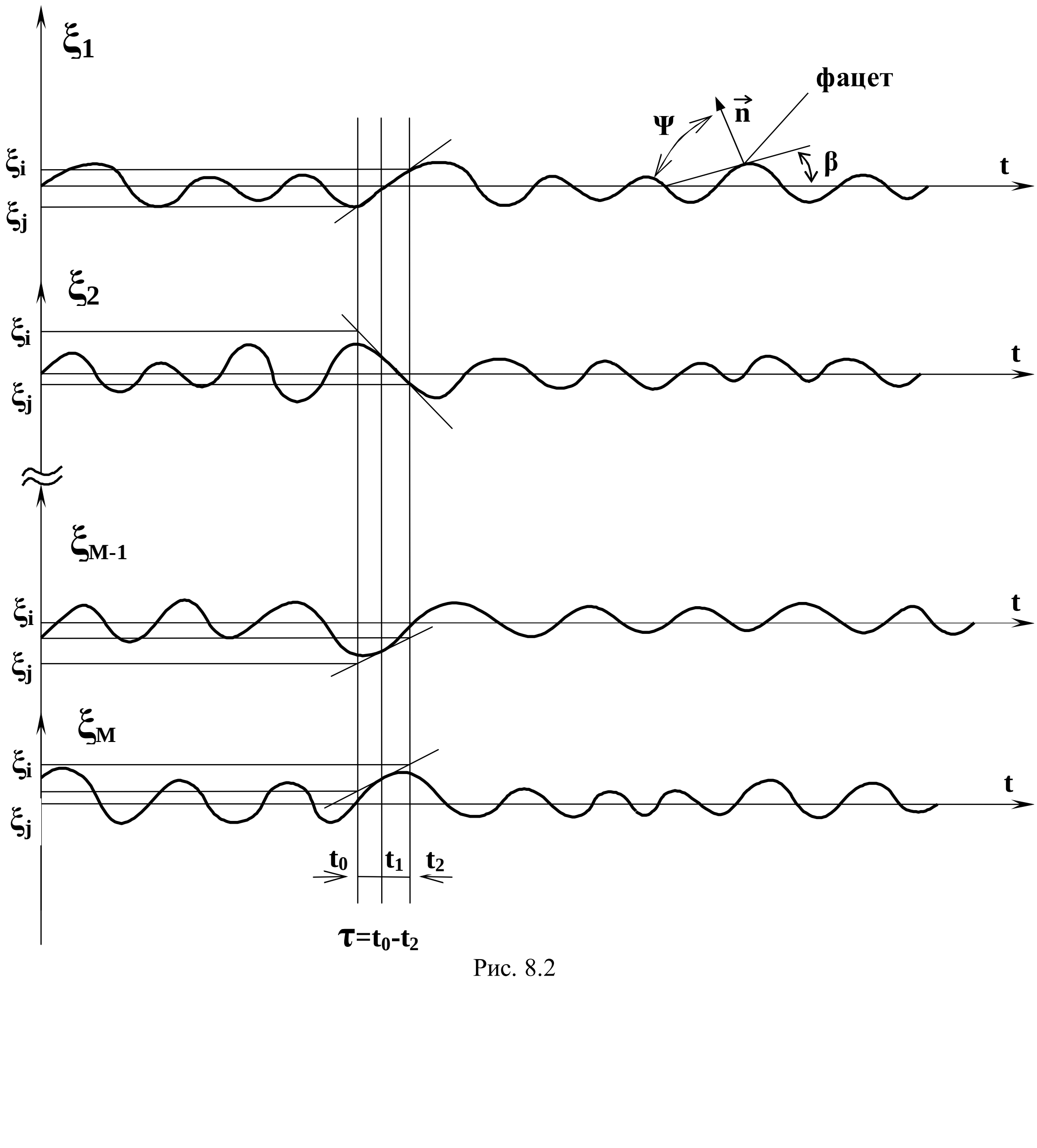


Рис. 8.2

вестной ПРВ самого этого процесса». На самом деле изучение этой проблемы является ключом к пониманию квантовой механики в целом и границ ее применения в частности. Решение данной проблемы подводит логическое обоснование под квантово-механическую процедуру перехода от координатного представления к импульсному и наоборот в силу того, что импульс частицы, по сути, является производной от ее координаты $p_x = m\partial x/\partial t$. Именно это обстоятельство позволяет обосновать связь между импульсным и координатным представлениями исходя не из феноменологических принципов корпускулярно-волнового дуализма, а из взаимосвязи между ПРВ случайного процесса и ПРВ производной этого же процесса.

Проблема определения одномерной плотности распределения вероятности (ПРВ) $\rho_1(g'(t))$ производной $n$-го порядка $n$ раз дифференцируемого случайного стационарного процесса $g(t)$ при известной только одномерной ПРВ $\rho_1(g(t))$ того же случайного процесса возникает в ряде задач статистической радиофизики, радиотехники и квантовой механики.

Отметим вначале общие свойства первой производной случайного стационарного процесса. Для этого рассмотрим $m$ реализаций случайного, стационарного, по крайней мере один раз дифференцируемого процесса $\xi(t)$ (рис.8.2). Из этого рисунка видно, что значение случайной величины $\xi(t_i)$ в сечении $t_i$ и значение производной этого процесса $\xi'(t_i) = \dfrac{\partial\xi(t_1)}{\partial t_1}$ при том же значении аргумента $t_i$ являются независимыми, а следовательно, и некоррелированными, случайными величинами. Данное утверждение может быть выражено аналитически [14]

$$< \xi(t_i)\xi'(t_i) >=< \frac{d}{dt}\frac{1}{2}[\xi(t_i)]^2 >= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} < [\xi(t_i)]^2 > = 0, \tag{8.5}$$

где <·> означает усреднение по реализациям. Здесь учтено, что все усредненные характеристики стационарного в узком смысле процесса являются постоянными величинами, а также, что операции дифференцирования и усреднения в данном случае являются коммутативными операциями. В том числе учтено, что дисперсия стационарных процессов не зависит от времени

$$< [\xi(t_i)]^2 > = const . \tag{8.6}$$

Существует также класс случайных процессов, в которых $\xi_i$ и $\xi_i'$ являются не только некоррелированными, но и независимыми случайными величинами. К таким относятся (важнейший для приложений) случайный, стационарный, гауссовский процесс [14,15]. Однако даже при статистической независимости случайных величин $\xi_i$ и $\xi'_i$ некая связь между ПРВ $\rho_1(\xi_i)$ и ПРВ $\rho_1(\xi_i')$ существует. Это вытекает хотя бы из хорошо известной процедуры получения ПРВ производной $\rho_1(\xi'_i)$ при известной двухмерной ПРВ исходного процесса

$$\rho_2(\xi_i, \xi_j) = \rho_2(\xi_i, t_i; \xi_i, t_j). \tag{8.7}$$

Для этого в выражении (8.7) необходимо сделать замену переменных

$$\xi_i = \xi_k - \frac{\tau}{2}\xi_k'; \quad \xi_j = \xi_k + \frac{\tau}{2}\xi_k'; \quad t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \quad t_j = t_k - \frac{\tau}{2}, \tag{8.8}$$

где

$$\tau = t_j - t_i; \quad t_k = \frac{t_j - t_i}{2},$$

с якобианом преобразования $[J] = \tau$. В результате из ПРВ (8.7) получим

$$\rho_2(\xi_k, \xi_k') = \lim_{\tau\to 0}\tau\, \rho_2\left(\xi_k - \frac{\tau}{2}\xi',\, t_k - \frac{\tau}{2};\, \xi_k + \frac{\tau}{2}\xi',\, t_k + \frac{\tau}{2}\right). \tag{8.9}$$

Далее, интегрируя полученное выражение по $\xi_k$, найдем искомую ПРВ производной исходного процесса в сечении $t_k$:

$$\rho_1(\xi_k') = \int_{-\infty}^{\infty}\rho_2(\xi_k, \xi_k')\,d\xi_k . \tag{8.10}$$

Формальная процедура (8.7) – (8.10) позволяет решить задачу определения ПРВ $\rho_1(\xi')$ при известной двухмерной ПРВ (8.7). Однако двухмерные ПРВ определены для очень ограниченного класса случайных процессов.

Поэтому необходимо рассмотреть возможность получения ПРВ $\rho_1(\xi_i')$ при известной одномерной ПРВ $\rho_1(\xi_i)$. Для решения поставленной задачи воспользуемся следующими свойствами случайных процессов:

1. Двухмерная ПРВ любого процесса может быть представлена в виде [14,15]

$$\rho_2(\xi_i, t_i; \xi_j, t_j) = \rho_1(\xi_i, t_i)\rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i), \tag{8.11}$$

где $\rho(\xi_j, t_j/\xi_i, t_i)$ – условная ПРВ.

2. Для стационарного в узком смысле случайного процесса справедливо тождество [14,15]

$$\rho_1(\xi_i, t_i) = \rho_1(\xi_j, t_j). \tag{8.12}$$

3. Условная ПРВ случайного стационарного процесса при $t_i \rightarrow t_j$ вырождается в дельта-функцию [15]

$$\lim_{\tau \to 0} \rho_2(\xi_i, t_i / \xi_j, t_j) = \delta(\xi_i - \xi_j). \tag{8.13}$$

На основании вышеперечисленных свойств попытаемся препарировать случайный процесс на участке $]\, t_i - \tau_0; t_i + \tau\,[$ при $\tau \rightarrow 0$ посредством следующей формальной процедуры. ПРВ $\rho_1(\xi_i) = \rho_1(\xi_i, t_i)$ и $\rho_1(\xi_j) = \rho_1(\xi_j, t_j)$ всегда можно представить в виде произведения двух функций

$$\rho(\xi_i) = \varphi(\xi_i)\varphi(\xi_i) = \varphi^2(\xi_i) \quad и \quad \rho(\xi_j) = \varphi(\xi_j)\varphi(\xi_j) = \varphi^2(\xi_j), \tag{8.14}$$

где $\varphi(\xi_i)$ – плотность амплитуды вероятности (ПАВ) случайной величины $\xi_i$ в сечении $t_i$.

Для стационарного случайного процесса справедливо тождество

$$\varphi(\xi_i) = \varphi(\xi_j), \tag{8.15}$$

в чем легко убедиться, взяв квадратный корень от обеих частей тождества (8.12). Тогда, согласно (8.14), получим (8.15). Отметим, что тождество (8.5) приближенно справедливо и для большинства нестационарных случайных процессов при $\tau \rightarrow 0$, т. е.

$$\varphi(\xi_i, t_i) = \lim_{\tau \to 0} \varphi(\xi_j, t_j = t_i - \tau).$$

При выполнении условия (8.15) выражение (8.11) может быть представлено в симметричном виде

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \varphi(\xi_i)\rho(\xi_j / \xi_i)\varphi(\xi_j), \tag{8.16}$$

где $\rho(\xi_j/\xi_i)$ – условная ПРВ, или в развернутом виде

$$\begin{aligned} &\rho\left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right] = \\ &= \varphi\left[\xi_i, t_j = t_k - \frac{\tau}{2}\right]\rho\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2} \;/\; \xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}\right]\varphi\left[\xi_i, t_i = t_k + \frac{\tau}{2}\right]. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Устремим в (8.17) $\tau$ к нулю, но таким образом, чтобы отрезок $\tau$ равномерно слева и справа стягивался в точку $t_k = (t_j - t_i)/2$. Обозначим симметричное стягивание $\tau$ к нулю через $\tau \rightarrow \pm 0$, тогда с учетом (8.13) из (8.16) получим

$$\lim_{\tau \to \pm 0} \rho(\xi_i, \xi_j) = \lim_{\tau \to \pm 0} \{\varphi(\xi_i)\rho(\xi_j / \xi_i)\varphi(\xi_j)\} = \varphi(\xi_{ik})\delta(\xi_{ik} - \xi_{ik})\varphi(\xi_{jk}), \tag{8.18}$$

где $\xi_{ik}$ – результат стремления случайной величины $\xi(t_i)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ слева (т. е. $\xi_i \rightarrow \xi_k^- = \xi_{ik}$ – предел слева при $t_i \rightarrow t_k^-$);

$\xi_{jk}$ – результат стремления случайной величины $\xi(t_j)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ справа (т. е. $\xi_j \rightarrow \xi_k^+ = \xi_{jk}$ – предел справа при $t_j \rightarrow t_k^+$).

Проинтегрировав обе части выражения (8.18) по $\xi_{ik}$ и $\xi_{jk}$, получим тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi_{ik})\delta(\xi_{jk}-\xi_{ik})\varphi(\xi_{jk})d\xi_{ik}d\xi_{jk}=1. \qquad (8.19)$$

Выражение (8.19) является формальным математическим тождеством из теории обобщенных функций, учитывающим свойства дельта-функции. Для того чтобы наполнить это выражение физическим содержанием, необходимо задать данной $\delta$-функции конкретный вид.

Определим вид $\delta$-функции для случая марковского, случайного процесса. Хотя марковские случайные процессы (т. е. процессы без вероятностного последствия) представляют собой специальный класс случайных процессов, значение их очень велико, поскольку выделяющие их условия оказываются выполненными в широкой области приложений теории. Это тем более справедливо, что случайные процессы общего вида во многих случаях могут быть приведены к схеме процесса без последствия, если воспользоваться более детальным описанием рассматриваемого процесса, т. е. должным образом увеличить количество переменных, описывающих состояние рассматриваемой системы. Для пояснения этого обратимся к случаю детерминированного процесса. Допустим, что динамическая система описывается дифференциальным уравнением не первого порядка, а второго. Тогда решение при начальных условиях

$$x=x_0,\ \ \dot{x}=u_0 \quad \text{при} \quad t=t_0$$

будет

$$x=f(t,x_0,u_0,t_0).$$

Если и теперь понимать под состоянием системы только координату $x$, то для плотности условной вероятности значения $x$ в момент $t$ надо было написать

$$v(t,x/t_0,x_0,u_0)=\delta\left[x-f(t,x_0,u_0,t_0)\right]. \qquad (8.20)$$

Но задание $u_0$ равносильно заданию двух значений $x$ в весьма близкие моменты времени (скажем, $x_0$ при $t = t_0$ и $x_0 - h$ при $t = t_0 - \tau$, так что $u_0=\lim\limits_{\tau\to 0}(t/\tau)$). Таким образом, условная вероятность, по существу, зависит от предшествующих состояний: $v\ (t, x\ /\ t_0, x_0, u_0) \approx\ v\ (t, x\ /\ t_0, x_0;\ t_0 - \tau\ ,\ x_0 - h)$, и, следовательно, статистическое обобщение (8.20) не является процессом марковского типа. Не только в статистической, но и в динамической теории обычно предпочитают избегать зависимости состояния системы от ее поведения до фиксированного начального момента. Это достигается расширением самого понятия состояния в момент $t$ путем введения новых характеризующих состояние величин. В приведенном примере применение этого приема сводится к тому, что наряду с координатой $x$ вводится еще и скорость $\dot{x}=u$. Понимая под состоянием совместное задание $x$ и $u$ в момент $t$, можно записать условную вероятность этого состояния для рассматриваемого динамического процесса в виде

$$\delta\left[x-f(t,x_0,u_0,t_0)\right]\delta\left[u-f(t,x_0,u_0,t_0)\right], \qquad (8.21)$$

что представляет собой частный случай вероятности перехода $v(t, x, u\ /\ t_0, x_0, u_0)$. Таким образом, в соответствующей статистической схеме мы приходим теперь к марковскому процессу, но для совокупности двух случайных функций $x$ и $u$, т. е. для двумерной ПРВ $\rho_2(x, u)$.

Аналогичным образом $k$-мерный случайный процесс, не являющийся марковским, можно путем введения достаточно обширной совокупности «координат» сделать марковским, но для большего числа измерений $k'$. Грубо говоря, для этого достаточно понимать под «состоянием» системы совокупность значения рассматриваемого процесса в последний наблюдаемый момент времени $t$ и некоторого количества значений из «предыстории» этого процесса $t' < t$.

Итак, рассмотрим непрерывный марковский процесс, для которого справедливо уравнение Эйнштейна – Фоккера [14, 15, 20]

$$\frac{\partial\rho(\xi_j/\xi_i)}{\partial t}=B\frac{\partial^2\rho(\xi_j/\xi_i)}{\partial\xi^2}, \qquad (8.22)$$

где $B$ – коэффициент диффузии.

Это дифференциальное уравнение параболического типа имеет три решения, одно из которых может быть представлено в виде

$$\rho_2\left(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ip(\xi_j - \xi_i) - p^2 B(t_j - t_i)\} dp, \tag{8.23}$$

где $p$ – обобщенный параметр (обобщенная частота). При $\tau \to \pm 0$ из (8.23) получим одно из определений дельта-функции

$$\lim_{\tau \to \pm 0} \rho(\xi_i / \xi_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ip(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dp = \delta(\xi_j - \xi_i), \tag{8.24}$$

которое на исследуемом интервале $\tau \to 0$ характерно для весьма широкого класса непрерывных процессов.

Подставив полученную таким образом дельта-функцию (8.24) в выражение (8.19), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik})\, \varphi(\xi_{jk}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ip(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dp \; d\xi_{ik}\, d\xi_{jk}\,. \tag{8.25}$$

Поменяв в (8.24) порядок интегрирования, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \exp\{-ip\xi_{ik}\} d\xi_{ik} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{jk}) \exp\{ip\xi_{jk}) d\xi_{jk} \right] dp\,. \tag{8.26}$$

Учтем, что, согласно (8.15), $\varphi(\xi_{ik}) = \varphi(\xi_{jk})$ и что хотя бы у один раз дифференцируемого процесса, согласно (8.18), $\xi_{ik} = \xi_{jk}$ . При этом выражение (8.26) может быть представлено в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(p) \varphi^*(p) dp = 1, \tag{8.27}$$

где

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{-ip\xi_k\} d\xi_k\,, \tag{8.28}$$

$$\varphi^*(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{ip\xi_k\} d\xi_k\,. \tag{8.29}$$

Подынтегральное выражение (8.27) отвечает всем требованиям ПРВ $\rho(p)$ случайной величины $p$:

$$\rho(p) = \varphi(p)\varphi^*(p) = |\varphi(p)|^2\,. \tag{8.30}$$

Выясним теперь, что представляет из себя случайная величина $p$. Для этого вернемся к рассмотрению выражения (8.23). Результат интегрирования в правой части этого выражения от величины $p$ не зависит. Поэтому ее можно рассматривать как некую обобщенную частоту или обобщенное волновое число. Однако физическая постановка задачи и формализм математической записи выражения (8.22) накладывают на величину $p$ следующие ограничения:

1) величина $p$ должна характеризовать случайный процесс в исследуемом интервале $]t_i - \tau_0;\, t_i + \tau[$ при $\tau \to 0$;

2) Величина $p$, согласно математической записи правой части выражения (8.23), должна принадлежать множеству действительных чисел ($p \in R'$), имеющему мощность континуума, т. е. $p$ должна иметь возможность принимать любое значение из диапазона $]-\infty, \infty[$;

3) $p$ должна быть случайной величиной.

Всем трем требованиям удовлетворяют любая из следующих случайных величин, связанных со случайным процессом на исследуемом интервале:

$$\xi_i' = \frac{\partial \xi_k}{\partial t}, \;\; \xi_i'' = \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t}, \;\; \ldots \;, \;\; \xi^{(n)}{}_i = \frac{\partial^n \xi_i}{\partial t^n}. \tag{8.31}$$

Однако эти случайные величины характеризуют процесс на исследуемом объекте не в равной степени. Рассмотрим одну из реализаций исследуемого процесса. Функция $\xi(t)$ (рис. 8.2) в интервале $[t_i\,;\;\; t_j = t_i + 2\tau]$ при

$\tau < \tau_{кор}$ (где $\tau_{кор}$ – радиус корреляции случайного процесса на исследуемом участке) может быть разложена в ряд Тейлора – Маклорена

$$\xi(t_j) = \xi(t_i) + \xi'(t_i)\tau + \frac{\xi''(t_i)}{2}\tau^2 + \ldots + \frac{\xi^{(n)}}{n!}\tau^n + \ldots \quad (8.32)$$

или в более симметричном виде

$$\frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi_i' + \frac{\xi_i''}{2!}\tau + \ldots + \frac{\xi^{(n)}\tau^{n-1}}{n!} + \ldots \ . \quad (8.33)$$

Как видно из (8.33), все случайные величины (8.31) имеют определенное значение при переходе случайного процесса $\xi(t)$ из точки $(\xi_i, t_i)$ в току $(\xi_i, t_j = t_i + \tau)$, но не в равной степени. Так же как в (8.23), устремим $\tau$ к нулю, при этом из (8.33) получим

$$\lim_{\tau \to \pm 0} \frac{\xi_j - \xi_i}{\tau_k} = \xi_k' \ . \quad (8.34)$$

Таким образом, единственной случайной величиной, удовлетворяющей всем вышеперечисленным требованиям на исследуемом интервале $[t_i = t_k - \tau/2;\ t_j = t_k + \tau/2]$, при $\tau \to \pm 0$, является первая производная исходного случайного процесса $\xi'_k$ в сечении $t_k$. Следовательно, остается положить, что случайная величина $p$ в выражении (8.23) линейно связана только с $\xi'_k$, т. е.

$$p = \frac{\xi_k'}{h}, \quad (8.35)$$

где $h$ – коэффициент пропорциональности.

Подставляя (8.35) в (8.27) – (8.30) с учетом (8.14), получим искомую процедуру получения ПРВ производной $\rho(\xi'_k)$ случайного процесса в сечении $t_k$ при известной одномерной ПРВ $\rho(\xi_k)$ .Таким образом, в случае марковского, хотя бы один раз дифференцируемого случайного процесса искомая ПРВ $\rho(\xi'_k)$ может быть определена по следующему алгоритму (индекс $k$ для краткости в дальнейшем опускается):

1. Заданная одномерная ПРВ $\rho(\xi)$ представляется в виде произведения двух ПАВ $\varphi(\xi)$:

$$\rho(\xi) = \varphi(\xi)\varphi(\xi). \quad (8.36)$$

2. Осуществляются два преобразования Фурье

$$\varphi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) exp\{i\xi'\xi / h\} d\xi \ , \quad (8.37)$$

$$\varphi*(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) exp\{-i\xi'\xi / h\} d\xi \ . \quad (8.38)$$

3. Окончательно для произвольного сечения случайного стационарного процесса получим искомую ПРВ производной

$$\rho(\xi') = \varphi(\xi')\varphi^*(\xi') = |\varphi(\xi')|^2 . \quad (8.39)$$

Для выяснения физической сущности коэффициента пропорциональности $h$ воспользуемся сравнением с известными результатами. Данный подход небезупречен с точки зрения математической строгости, но позволяет достаточно эффективно получить конкретный, практически важный результат.

Рассмотрим стационарный гауссовский, случайный процесс. При этом в каждом сечении этого процесса случайная величина $\xi$ распределена по гауссовскому закону:

$$\rho(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\{-(\xi - m_\xi)^2 / 2\sigma_\xi^2\}, \quad (8.40)$$

где $\sigma^2_\xi$ и $m_\xi$ – дисперсия и математическое ожидание исходного гауссовского, случайного процесса.

Осуществляя с ПРВ (8.40) последовательность операций (8.36) – (8.39), получим ПРВ производной:

$$\rho(\xi')\frac{1}{\sqrt{2\pi\left[h/2\sigma_{\xi}\right]^2}}\exp\left\{-(\xi')^2/(2\left[h/2\sigma_{\xi}\right]^2)\right\},\tag{8.41}$$

а с помощью известной процедуры (8.7) – (8.10) для аналогичного случая получим [14,15]

$$\rho(\xi')=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi'}}}\exp\left\{-(\xi')^2/2\sigma_{\xi'}^2\right\},\tag{8.42}$$

где $\sigma_{\xi'}=\sigma_{\xi}/\tau_{кор}$ ($\tau_{кор}$– радиус корреляции исходного, случайного процесса).

Сравнивая выражения (8.41) и (8.42), находим, что при

$$h=\frac{2\sigma_{\xi}^2}{\tau_{кор}}\tag{8.43}$$

эти ПРВ полностью совпадают.

Необходимо отметить, что в статистической физике и квантовой механике для перехода от координатного представления функции состояния элементарной частицы к ее импульсному представлению применяется формальная процедура, практически аналогичная процедуре (8.36) – (8.39). Ощутимое различие заключается только в определении коэффициента пропорциональности $h$. В квантовой механике $h = \hbar/m_r$, где $\hbar$ – универсальная постоянная Планка, $m_r$ – масса элементарной частицы, а в данной работе показано, что $h$ связано с параметрами исходного, случайного процесса соотношением (8.43).

На основании формальной процедуры (8.36) – (8.39) можно также получить ПРВ $\rho(\xi_i'')$ второй производной исходного, по крайней мере дважды дифференцируемого, случайного процесса. Для этого в качестве случайного процесса следует рассматривать один раз продифференцированный исходный процесс $\xi'(t) = \partial\xi(t)/\partial t$, при этом ПРВ $\rho(\xi'_i)$ определяется посредством применения процедуры (8.36) – (8.39). Тогда распределение второй производной можно определить посредством той же процедуры, только при этом вместо $\rho(\xi_i)$ в (8.36) необходимо подставить уже $\rho(\xi'_i)$. Аналогично может быть получена ПРВ $\rho(\xi_i^{(n)})$ любой производной $n$ раз дифференцируемого исходного марковского процесса с помощью рекуррентной процедуры

1. $\rho(\xi^{(n-1)})=\varphi\left(\xi^{(n-1)}\right)\varphi\left(\xi^{(n-1)}\right)$; (8.44)

2. $$\varphi\left(\xi^{(n)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi h_n}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi^{(n-1)})\exp\left\{\frac{-i\xi^{(n)}\xi^{(n-1)}}{h_n}\right\}d\xi^{(n-1)},\tag{8.45}$$

$$\varphi^*\left(\xi^{(n)}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi h_n}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi^{(n-1)})\exp\left\{\frac{i\xi^{(n)}\xi^{(n-1)}}{h_n}\right\}d\xi^{(n-1)};\tag{8.46}$$

3. $\rho(\xi^{(n)})=\varphi\left(\xi^{(n)}\right)\varphi^*\left(\xi^{(n-1)}\right)$, (8.47)

где $$h_n=\frac{2\sigma_{\xi^{(n-1)}}^2}{\tau_{кор\xi^{(n-1)}}}\tag{8.48}$$

$\sigma_{\xi^{(n-1)}}^2$, $\tau_{кор\ \xi^{(n-1)}}$– дисперсия и радиус корреляции $n-1$ раз дифференцируемого процесса.

Таким образом, поставленная задача определения ПРВ $\rho(\xi^{(n)})$ производной $n$-го порядка в $t_i$ -м сечении по крайней мере $n$ раз дифференцируемого, случайного стационарного в узком смысле процесса при известной только одномерной его ПРВ $\rho(\xi_i)$ решается на основании рекуррентной процедуры (8.44) – (8.48).

Мы пришли к важному выводу, что квантово-механический переход от координатного представления к импульсному применим лишь к марковским процессам. То есть к так называемым процессам «без последействия». Такой процесс перед следующим шагом «забывает» все свои предыдущие состояния.

К аналогичному выводу пришел И. Пригожин [26, 79], показавший, что квантово-механический формализм инвариантен во времени по причине отсутствия последействия, т. е. корреляционных связей с предыдущими состояниями системы. Эти корреляционные связи ответственны за диссипативные эффекты, обозначающие стрелу времени, т. е. неминуемую эволюцию системы к равновесному состоянию (термодинамической смерти).

Приведенный здесь алгоритм перехода от координатного представления $\rho(\xi_i)$ к импульсному $\rho(\xi'_i)$ и обратно получается при конкретном виде дельта-функции (8.24), физическое содержание которой заключается в марковости исходного стационарного, случайного процесса. Интересно было бы посмотреть, к каким результатам может привести использование других видов дельта-функции, связанных с другими физическими условиями протекания случайных процессов.