8.4. Вывод уравнения Шредингера (*)

«Трудился и нашел – верь, не трудился и нашел – не верь».

Трактат Мегила, 6

Вернемся к рассмотрению уравнения (8.3)

$$E_m = T(t) + U(t) = \text{const}\,. \tag{8.63}$$

Если скорость материальной «точки» невелика, то, согласно нерелятивистской механике, она обладает кинетической энергией

$$T(t) = \frac{P_x^2(t) + P_y^2(t) + P_z^2(t)}{2\mu}\,, \tag{8.64}$$

где $P_x(t)$, $P_y(t)$, $P_z(t)$ – мгновенные значения компонент импульса «точки»,

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \tag{8.65}$$

? = E_0/c^2 – масса покоя «точки», соответствующая его энергии покоя E_0.

Вид усредненной потенциальной энергии материальной «точки», блуждающей возле истинного центра локального $\lambda_{-12\,\div\,-16}$ - вакуумного образования, пока не будем конкретизировать, но положим

$$\langle U(x, y, z)\rangle = \mu\,\varphi\,(x, y, z)\,, \tag{8.66}$$

где $\varphi\,(x, y, z)$ – потенциал сил упругости, стремящихся вернуть «точку» в положение равновесия (рис. 8.1а,б).

Если исследуемая микроскопическая система изолирована (например, центр «солнечного сплетения» в ядре «электрона», или само ядро «электрона» в поле ядра атома), то, как известно, полная энергия такой системы не зависит от времени. Это возможно только в том случае, если полная энергия блуждающей материальной «точки» E_m в любое мгновение времени постоянна, т. е. по мере сложного движения «точки» ее кинетическая энергия перетекает в потенциальную энергию, и наоборот. При этом среднее значение полной механической энергии материальной «точки» всегда совпадает с ее мгновенным значением:

$$\overline{E}_T = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E_T = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N} N E_T = E_T = const\,, \tag{8.67}$$

где N – число реализаций.

Действие рассматриваемой материальной «точки» S в нерелятивистской механике определено следующим образом [33]

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2}[T(P_x, t) - U(x,t)]dt + E_T t\,. \tag{8.68}$$

Для упрощения выкладок рассмотрен одномерный случай; в случае трех измерений вывод уравнения Шредингера будет точно таким же, но с большим числом интегрирований.

Функционал (8.68) позволяет на основании принципа наименьшего действия найти дифференциальное уравнение, описывающее динамику блуждающей материальной «точки» в рамках ограниченной области. Из-за сложности траектории движения блуждающей «точки» нас будет интересовать усредненное действие. В результате усреднения (8.68), с учетом (8.67), имеем

$$\overline{S} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i(t) = \int_{t_1}^{t_2}[\overline{T(p_x, t)} + \overline{U(x,t)}]dt + E_T t\,. \tag{8.69}$$

Напомним, что для стационарного случайного процесса имеет место равенство между усреднением по времени или по реализациям

$$\overline{U(x,t)} = \langle U(x)\rangle\,.$$

Знак плюс в подынтегральном выражении поставлен потому, что усредненная потенциальная энергия отрицательна, т. к. всегда стремится вернуть материальную «точку» в «истинный» центр локального $\lambda_{-12 \div -16}$-вакуумного образования. Усреднение в (8.69) осуществляется по реализациям, взятым за один и тот же промежуток времени $\tau = t_2 - t_1$ (это возможно при эргодическом процессе).

Среднюю кинетическую энергию блуждающей материальной «точки» можно представить в виде

$$\overline{T(p_x,t)} = \frac{1}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(p_x)p_x^2 dp_x \,, \tag{8.70}$$

а ее среднюю потенциальную энергию – в виде

$$\overline{U(x,t)} = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)U(x)dx \,, \tag{8.71}$$

где $\rho(p_x)$ – плотность распределения вероятности (ПРВ) импульса материальной точки, т. е. плотность распределения вероятности того, что блуждающая в замкнутой области материальная «точка» обладает импульсом p_x;

$\rho(x)$ – ПРВ места нахождения блуждающей «точки» относительно начала отсчета на оси x, совмещенной с истинным «центром» локального $\lambda_{-12 \div -16}$-вакуумного образования (здесь t играет роль параметра).

При этом выражение (8.69) можно представить в виде

$$\overline{S} = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{1}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(p_x)p_x^2 dp_x + \int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)U(x)dx\right\}dt + E_T t \,. \tag{8.72}$$

До этого мы не привнесли ничего нового. Просто мы сначала записали усредненную функцию действия для материальной «точки», хаотически движущейся возле «истинного» центра локального $\lambda_{-12 \div -16}$-вакуумного образования, причем таким образом, что полная энергия этой «точки» = кинетической энергии + потенциальная энергия = const (постоянна). А затем усреднили функцию действия, используя стандартную процедуру теории вероятности, с учетом стационарности рассматриваемого случайного процесса.

Теперь предлагается свежая идея. Если нам удастся выразить $\rho(p_x)$ (ПРВ импульса блуждающей «точки») через $\rho(x)$ (ПРВ ее координаты), то на основании принципа экстремума действия (8.72) мы сможем определить экстремаль данного функционала $\rho_{\text{эстр}}(x)$.

Прежде всего, вспомним, что импульс материальной «точки», по сути, является производной от ее координаты по времени

$$p_x = \mu\frac{dx}{dt} = \mu\dot{x} \,. \tag{8.73}$$

Процедура получения ПРВ производной случайного процесса, при известной ПРВ самого стационарного, случайного процесса представлена в п. 8.2 [см. (8.36) – (8.39)], где показано, что искомая ПРВ $\rho(p_x)$ может быть определена из ПРВ $\rho(x)$ той же системы при условии марковости рассматриваемого случайного процесса по следующему алгоритму:

1. Одномерная ПРВ $\rho(x)$ представляется в виде произведения двух плотностей амплитуды вероятности (ПАВ) $\varphi(\xi)$:

$$\rho(x) = \varphi(x)\varphi(x) \tag{8.74}$$

или

$$\rho(x) = \varphi(x,t)\varphi^*(x,t) \,, \tag{8.74а}$$

где в силу постоянства E_m

$$\psi(x,t) = \psi(x)\exp\left\{i\left(\frac{E_T t}{\hbar}\right)\right\}, \tag{8.74б}$$

$$\psi^*(x,t) = \psi(x)\exp\left\{-i\left(\frac{E_T t}{\hbar}\right)\right\}. \tag{8.74в}$$

2. Осуществляются два преобразования Фурье

$$\varphi(\dot{x},t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,t)\exp\{i\dot{x}\,x/l\}dx\,,$$

$$\varphi*(\dot{x},t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi*(x,t)\exp\{-i\dot{x}\,x/l\}dx$$

или с учетом (8.73)

$$\varphi(p_x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,t)\exp\{ip_x x/\hbar\}dx,\tag{8.75}$$

$$\varphi*(p_x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi*(x,t)\exp\{-ip_x x/\hbar\}dx\,,\tag{8.76}$$

где $\hbar = l$? – постоянная Планка.

3. Окончательно ПРВ производной или импульса материальной «точки», блуждающей возле «истинного» центра локального $\lambda_{-12\div-16}$-вакуумного образования, равна

$$\rho(p_x)=\varphi(p_x,t)\varphi*(p_x,t)=\varphi(p_x)\exp\{iE_T/\hbar\}\cdot\varphi(p_x)\exp\{-iE_t/\hbar\}=|\varphi(p_x)|^2\,.\tag{8.77}$$

Воспользуемся доказанным в п. 8.3 свойством интегралов Фурье, которое позволяет записать средние значения любой функции от импульса материальной «точки» $F(p_x)$ в координатном представлении

$$\overline{F(p_x)}=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(p_x)F(p^n{}_x)dp_x=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)F\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\psi^*(x,t)dx\,.\tag{8.78}$$

Используя свойства (8.78), усредненную кинетическую энергию (8.70) материальной «точки» (для одномерного случая) можно представить в виде

$$\overline{T}=\frac{1}{2\mu}\overline{p_x^2}=\frac{1}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(p_x)p_x^2dp_x=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)\frac{\partial^2\psi*(x,t)}{\partial x^2}dx,\tag{8.79}$$

а усредненную потенциальную энергию (8.71) с учетом (8.74) – в виде

$$\overline{U}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)U(x)\psi*(x,t)dx,\tag{8.80}$$

Простой проверкой легко убедиться также в том, что

$$\overline{E_T}=-\int_{-\infty}^{\infty}i\hbar\psi(x)e^{-iE_Tt/\hbar}\frac{\partial\psi(x)e^{iE_Tt/\hbar}}{\partial t}dx=E_T=const,\tag{8.81}$$

или

$$\overline{E_T}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)\frac{\partial\psi*(x,t)}{\partial t}dx=E_{Ш}=const\,.\tag{8.82}$$

Подставляя (8.79), (8.80) и (8.82) в (8.72) получим усредненное действие

$$\overline{S}=\int_{t_1}^{t_2}\left\{-\frac{\hbar^2}{2\mu}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)\frac{\partial^2\psi*(x,t)}{\partial x^2}dx+\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)U(x)\psi*(x,t)dx+\int_{-\infty}^{\infty}i\hbar\psi(x,t)\frac{\partial\psi*(x,t)}{\partial t}dx\right\}dt\tag{8.85}$$

или

$$\overline{S} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\psi(x,t)\frac{\partial^2\psi*(x,t)}{\partial x^2}+\psi(x,t)U(x)\psi*(x,t)+\psi(x,t)i\hbar\frac{\partial\psi*(x,t)}{\partial t}\right)dxdt\,. \tag{8.86}$$

Условие экстремальности усредненного действия (8.86) требует обращения в ноль его первой вариации (все последующие действия соответствуют формализму вариационного исчисления [34])

$$\delta\overline{S} = \delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\psi(x,t)\frac{\partial^2\psi*(x,t)}{\partial x^2}+\psi(x,t)U(x)\psi*(x,t)+\psi(x,t)i\hbar\frac{\partial\psi*(x,t)}{\partial t}\right)dxdt = 0\,. \tag{8.87}$$

Экстремаль функционала (8.87), т. е. функция $\psi(x, t)$, при которой усредненное действие (8.87) принимает максимальное или минимальное значение, определяется уравнением Эйлера – Пуассона.

Из вариационного исчисления известно [34], что уравнение Эйлера – Пуассона для лагранжиана L, являющегося подынтегральным выражением в функционале действия

$$S = \int L\left(x,t,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial t},\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial x}\right)dxdt,\quad [\text{где } z = \psi(x, t)], \tag{8.88}$$

имеет вид [34]

$$L_z - \frac{\partial}{\partial x}\{L_p\} - \frac{\partial}{\partial t}\{L_g\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{L_r\} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{L_t\} + \frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\{L_s\} = 0\,, \tag{8.89}$$

здесь

$$p = \frac{\partial z}{\partial x};\quad g = \frac{\partial z}{\partial t};\quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial t\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{L_p\} = L_{px} + L_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + L_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + L_{gp}\frac{\partial g}{\partial x} \tag{8.90}$$

– называется полной частной производной по x.

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial t}\{L_g\} = L_{gt} + L_{gz}\frac{\partial L}{\partial t} + L_{gp}\frac{\partial p}{\partial t} + L_{gg}\frac{\partial g}{\partial t} \tag{8.91}$$

и т. д.

Используя подынтегральное выражение из усредненного действия (8.87), сначала определим

$$L_z = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + 2\psi(x)U(x) + i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t};\qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\{L_t\} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{L_p\} = 0;\qquad \frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\{L_s\} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{L_g\} = 2i\hbar\frac{\partial\psi(x)}{\partial t};\qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\{L_r\} = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}.$$

Подставляя эти выражения в (8.89), окончательно получим знаменитое уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x)\,\psi(x,t)\,, \tag{8.100}$$

где

$$\psi(x,t)\psi*(x,t) = |\psi(x)|^2 = \rho(x)$$

– ПРВ местонахождения материальной «точки», блуждающей относительно начала отсчета оси x.

Таким образом, уравнение (8.100) является не чем иным, как уравнением Шредингера с борновским пониманием смысла волновой функции.

Обобщение на три измерения сводится просто к увеличению числа интегрирований тривиально. При этом имеем

$$i\hbar\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial r^2} + U(r,t)\psi(r,t) \ , \qquad (8.101)$$

где согласно (8.74*б*)

$$\psi(r,t) = \psi(r)\exp\left\{-i(\frac{E_T t)}{\hbar})\right\} \ , \qquad (8.102)$$

r – радиус-вектор с началом в «истинном» центре исследуемой изолированной $\lambda_{-12\div-16}$-вакуумной области ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) (см. рис. 8.1).

Данный подход позволяет логически обосновать основное уравнение нерелятивистской квантовой механики исходя из принципов, на которых базируется развиваемая в настоящей работе теория, что, возможно, свидетельствует в пользу справедливости развиваемых здесь воззрений.

Материалы данного пункта были впервые опубликованы автором в 1990 г. в [92] в порядке обсуждения, благодаря доброй воле моих учителей и наставников доктора технических наук, профессора Альберта Андреевича Кузнецова и доктора физико-математических наук, профессора Анатолия Ивановича Козлова.

8.4.1. Иона

И было Слово ГОСПОДНЕЕ к Ионе, сыну Амафиину: «Встань, иди в Ниневию – город великий и проповедуй в нем, ибо злодеяния его дошли до МЕНЯ» (Библия, Иона, 1:1). Иона сильно испугался. Что – он, и что – могущественная Ниневия?

Иона решил скрыться от Лица ГОСПОДА. Он сел на корабль, плывущий в Фарсис. Но корабль попал в сильную бурю. Корабельщики устрашились и стали бросать жребий – за кого их постигла беда. И пал жребий на Иону. И когда они узнали, что Иона – еврей, скрывающийся от Лица ГОСПОДА Небес, Сотворившего море и сушу, то устрашились страхом великим, но хотели сначала спастись сами и спасти Иону. Но не могли. И с мольбой к Б-ГУ, чтобы не вменилась им кровь невинная, бросили Иону в море. И море утихло.

Иону проглотил кит. И пробыл Иона в чреве кита три дня и три ночи, и объял его ужас. И взмолился он к ГОСПОДУ: «Изнемогла во мне душа моя. Изведи меня, ГОСПОДИ, из ада, и я исполню Волю ТВОЮ».

Когда изверг кит Иону на сушу, он пошел в Ниневию по Слову ГОСПОДНЮ. И ходил Иона по Ниневии, городу великому, и говорил: «Еще сорок дней – и Ниневия будет разрушена!» Он терпел нужду и ненавистные взгляды горожан, но слово его дошло до царя Ниневии (Мидраш говорит, что это был тот самый фараон, который спасся после преследования выходящих из Египта евреев) – и он встал с престола своего, надел вретища и сел в пепел. В Ниневии был объявлен пост и раскаяние.

На сороковой день Иона, претерпевший лишения и страдания, вышел из города, сел на холме напротив Ниневии и стал ждать, когда ее постигнет кара Небесная. Солнце палило его, ветер обдавал его горячим песком, а город стоял, как и прежде. Обиженный Иона подставил свою голову лучам солнца и терпеливо ждал, что будет с городом: «Потому я и бежал от лица ТВОЕГО, ибо знал, что ТЫ – Благий и Милосердный, Долготерпеливый и Многомилостивый, Сожалеешь о бедствии». Б-ГУ стало Жаль Иону и ОН произрастил растение, чтобы над его головой была тень. Усталый Иона заснул под сенью Б-жественной неги. Когда он проснулся, растение, скрывавшее его от палящего солнца, засохло, и он так огорчился, что стал просить себе смерти.

И Сказал Б-Г Ионе: «Неужели так сильно огорчился ты за растение?». Он сказал: «Очень огорчился, даже до смерти». Тогда Сказал ГОСПОДЬ: «Ты сожалеешь о растении, над которым ты не трудился и которого не растил, которое в одну ночь выросло и в одну же ночь и пропало: МНЕ ли не пожалеть Ниневии, города великого, в котором более ста двадцати тысяч, не умеющих отличить правой руки от левой, и множество скота?» (Библия, Иона, 4:11).

8.4.2. Второй вывод уравнения Шредингера (*)

Приведем теперь второй вариант вывода уравнения Шредингера на основании минимума свободных энергий Гиббса или максимума энтропии квантовой системы. Под квантовой системой мы продолжаем подразумевать материальную «точку», блуждающую возле истинного центра сингулярности исследуемой пикоскопической области псевдоповерхности Естества (рис. 8.1а,б).

Если волновая функция $\psi(x,\ t) = \psi(x)$ не зависит от времени, то для материальной «точки» из выражения (8.87) легко получаем широко известный вариационный принцип. В данном случае имеем

$$\delta\,\overline{S} = \delta \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\hat{H}\,\psi^*(x)dx\int_{t_1}^{t_2} dt, \tag{8.102а}$$

где $\hat{H} = -\dfrac{\hbar^2}{2\mu}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - U(x)$ – оператор Гамильтона. Следовательно,

$$\delta\,\frac{\overline{S}}{\tau} = \delta\overline{E}_c = \delta\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\hat{H}\,\psi^*(x)dx,$$

откуда получаем

$$\delta\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\left(\hat{H} - E_c\right)\psi^*(x)dx = 0\,. \tag{8.102\textit{б}}$$

Экстремумы данного функционала, как известно, должны удовлетворить уравнению

$$\hat{H}\,\psi(x) = E_c\psi(x). \tag{8.102в}$$

Но до данной работы принцип экстремальности функционала (8.102*б*) не имел основополагающего значения, т. к. не позволял найти оператор Гамильтона $\hat{H}$, который по-прежнему получали с помощью квантово-механического формализма, подставляя в гамильтонианы аналогичных классических систем вместо $P_x \to i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$ и вместо $x \to \hat{x}$ и т. д., тогда развиваемые в данной работе принципы скрытой термодинамики на основании экстремальности усредненного действия позволяют найти оператор Гамильтона естественным путем, без насилия над логикой. Можно показать, что вариационный принцип (8.102*б*) является лишь частным случаем более общего принципа экстремума свободной энергии изолированной квантовой системы. Действительно, если, например, в среднем покоящееся локальное $\lambda_{-12\,\div\,-16}$-вакуумное образование рассматривать как термодинамическую систему в термостате (что полностью соответствует основным концепциям скрытой термодинамики), то в состоянии равновесия, согласно с канонами классической термодинамики, первая вариация свободной энергии равна нулю, а вторая больше нуля. Это соответственно записывается в виде следующих выражений:

$$\delta F = \delta\left(\overline{E}_c - kTH\right) = 0; \qquad \partial^2 F > 0, \tag{8.102г}$$

где H – энтропия, T – абсолютная температура данной системы, а k – постоянная Больцмана.

Полная энтропия системы типа «электрон» (точнее, блуждающее ядро электрона), без учета релятивистских эффектов, связанных со спином, имеет вид

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\rho\left(x, P_x'\right)\ln\rho\left(x, P_x'\right)dx\,dP_x', \tag{8.102д}$$

где $\rho\,(x, P'_x)$ – совместная ПРВ координаты и импульса материальной точки.

Преобразуем выражение (8.102д)

$$H = -\int\int \rho(x)\rho\left(P_x'/x\right)\ln\left(\rho(x)\rho\left(P_x'/x\right)\right)dP_x'dx \tag{8.102е}$$

или в более развернутом виде

$$H = -\int\rho(x)\ln\rho(x)dx - \int\rho(x)\int\rho\left(P_x'/x\right)\ln\rho\left(P_x'/x\right)dP_x'dx, \tag{8.102ж}$$

где $\rho(P'_x/x)$ – условная ПРВ импульса материальной «точки», т. е. каждой точке сингулярной области (рис. 8.2) соответствует своя ПРВ импульса, иными словами, квантовая система неоднородна. Теперь становится понятно, почему из-за внутренней неоднородности распределенной в пространстве квантовой системы любые попытки (типа функции Вигнера) определить совместную $\rho(x, P'_x)$ с точки зрения классической квантовой механики были обречены на провал.

Интеграл в (8.102 ж) является усредненной энтропией, поэтому

$$H(P_x, x) = -\int \rho(x)\ln\rho(x)dx - \int \rho(P_x)\ln\rho(P_x)dP_x, \tag{8.102з}$$

где $\rho(P_x)$ – ПРВ импульса, измеряемая с помощью чистого ансамбля данной квантовой системы.

При этом имеет место условие марковости статистики квантовой системы. После разложения функции $\ln\rho(P_x) = \ln\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x)e^{\frac{i2P_x x}{h}}dx$ в ряд Маклорена и несложных преобразований с учетом (8.78) получим

$$H = -\left(\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(x)\ln\psi^*(x)\psi(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\phi_\nu}{\nu}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^\nu\psi(x)dx\right), \tag{8.102и}$$

где ϕ_ν кумулянты ν-го порядка ($\phi_1 = m_1$, $\phi_2 = m_2 - m_1^2$, $\phi_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3\ldots$; здесь $m_i = \int_{-\infty}^{\infty}x^i\rho(x)dx$ – начальные статистические моменты i - го порядка.

В частном случае, когда не равен нулю и конечен только кумулянт второго порядка $\phi_2 = m_2 - m_1^2 = D$, равный дисперсии координат «материальной точки», то энтропия (18) принимает вид

$$H = -\frac{1}{kT}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)U(x)\psi^*(x)dx - F_x\right) - \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\left(\phi_2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\psi(x)dx. \tag{8.102к}$$

Здесь использовано выражение

$$H(x) = \frac{1}{kT}\left(\overline{U}(x) - F_x\right),$$

где

$F_x = kT\ln\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{U(x)}{kT}}dx$ – свободная энергия бурлящего $\lambda_{-12\div-16}$-вакуума, окружающего материальную «точку»,

После подстановки (8.102к) в (8.102г) и несложных преобразований окончательно получим условия экстремальности

$$\delta F_{P_x} = -\delta\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)(-\phi^2{}_2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) - E_c)\psi(x)dx, \tag{8.102л}$$

где $F_{P_x} = F - F_x = 2\phi_2\ln\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-T(P_x)}{2\phi_2^2}}dP_x$ – свободная энергия диффундирующего вокруг истинного центра сингулярности $\lambda_{-12\div-16}$-вакуумного сгустка («материальной точки»).

Здесь также использовано имеющее в данном случае место соотношение $\phi_2 = \frac{1}{2}kT$. Очевидно, что (8.102л) с точностью до множителя в первом члене подынтегрального выражения соответствует условию (8.102г). Дисперсию ϕ_2 можно представить в виде $\phi_2 = \frac{h}{\mu\omega}$, где ω – частота так называемого гармонического осциллятора. Размерность этой конструкции из фундаментальных констант h, ? и ω соответствует размерности дисперсии координаты материальной точки.

Как известно, для изолированных систем вместо того, чтобы минимизировать свободную энергию, можно искать экстремали $\psi(x)$, соответствующие максимуму функционала энтропии (8.102и). Это, собственно, вытекает из условия (8.102г), т. к. энергия блуждающей материальной «точки» изолированной квантовой системы всегда постоянна. Оба подхода приводят к идентичным результатам.

Таким образом, принципы скрытой термодинамики позволяют логически непротиворечиво обосновать фундамент квантовой механики и приводят к качественно новому пониманию структурной организации материи. Простота модели позволяет свести количество неразложимых логических конструкций типа «заряд», «спин», операторы и т. д. к минимуму. Плотность распределения, энтропия, свободная энергия и т. д. являются математическими конструкциями, производными от этих простейших понятий. Этих же принципов достаточно для описания процессов образования и исчезновения стабильных локальных $\lambda_{-12 \div -16}$-вакуумных образований, а также их взаимодействия.

В заключение получим вектор энергии-импульса и момент количества движения рассматриваемой квантовой системы. Компоненты вектора энергии-импульса задаются выражением

$$P^l = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\iint T^{l_0}\,dx, \qquad (8.102м)$$

где $T^{l_0} = \dfrac{\partial L_1}{\partial\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_l} - L_1$ – тензор плотности энергии-импульса (при $\kappa = 0$).

Легко показать, что для 3-мерного случая лагранжиан (8.88) имеет вид

$$L = \iiint \psi(-\frac{h^2}{2\mu}\nabla^2\psi + \psi U(x) + \left(\frac{2+k}{k}\right) ih\frac{\partial \psi}{\partial t}\,dxdydz = \iiint L_1 d\Omega, \qquad (8.102н)$$

Следовательно, из (8.102м) с учетом (8.102н) получаем

$$\begin{aligned}
P^x &= \iiint\int T^{xt}\,d\Omega dt = \int \psi(x,t) ih\frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial x}\left(\frac{2+k}{k}\right)dx = \overline{P}_x(t),\\
P^y &= \iiint\int T^{yt}\,d\Omega dt = \int \psi(y,t) ih\frac{\partial \psi^*(y,t)}{\partial y}\left(\frac{2+k}{k}\right)dy = \overline{P}_y(t),\\
P^z &= \iiint\int T^{zt}\,d\Omega dt = \int \psi(z,t) ih\frac{\partial \psi^*(z,t)}{\partial z}\left(\frac{2+k}{k}\right)dx = \overline{P}_z(t),\\
P^t &= \iiint\int T^{tt}\,d\Omega dt = \iiint\int \psi ih\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\left(\frac{2+k}{k}\right)d\Omega dt = \overline{E}_c(t).
\end{aligned} \qquad (8.102о)$$

Тензор плотности момента количества движения имеет вид $M_0{}^{mlo} = x^m T^{lo} - x^l T^{mo}$, отсюда имеем

$$\int M_t{}^{xyz}\,dtd\Omega = \int \psi\left(\frac{2+k}{k}\right) ih\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi^* d\Omega = \overline{M}_z{}^x(t). \qquad (8.102п)$$

Таким образом, никаких противоречий с основными положениями квантовой механики не возникает.

8.4.1. Момент импульса блуждающей материальной точки

Вернемся к рассмотрению модели «электрона» в виде блуждающей материальной «точки» (МТ) возле истинного центра рассматриваемой сингулярной области (рис. 8.1*б*).

Очевидно, что по мере хаотического движения МТ постоянно меняет направление своего движения. Поэтому в рамках рассматриваемой модели МТ постоянно должна обладать неким моментом импульса

$$\vec{L}^{э} = \vec{r} \times \vec{p}\ , \qquad (8.103\ а)$$

где

r – расстояние от истинного центра сингулярной области до МТ.

p = ***v****μ* –мгновенное значение импульса МТ,

или в координатном виде

$$L_x^э = yp_z - zp_y;$$
$$L_y^э = zp_x - xp_z; \qquad (8.103\ б)$$
$$L_z^э = xp_y - yp_x;$$

При этом квадрат модуля момента импульса равен

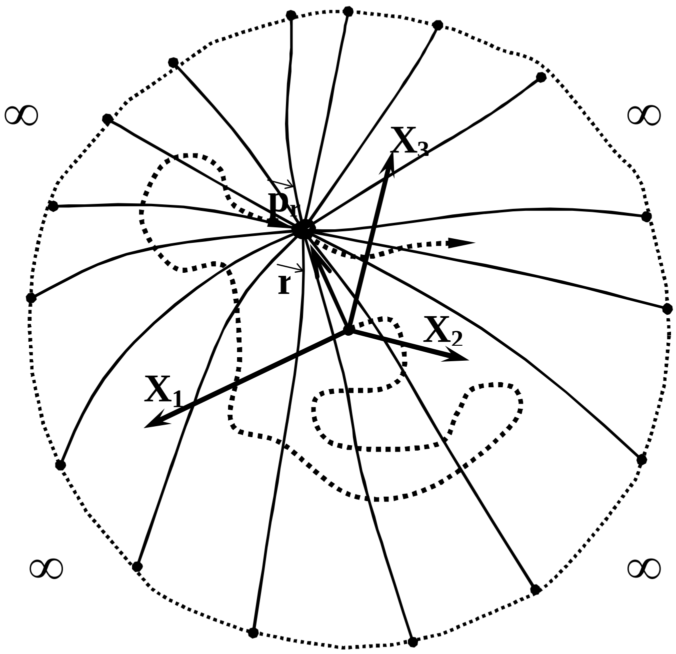

Рис. 8.1*б*. Хаотическое движение материальной «точки» (МТ) возле центра сингулярности в поле центральной силы «упругости», стремящейся вернуть МТ в центр данного образования.

$$L^{э2} = L_x^{э2} + L_y^{э2} + L_z^{э2}.$$

Сразу же отметим следующее. В рамках Алсигны для подобной модели «позитрона», в силу принципа отсутственности, мы должны полагать момент импульса его блуждающей антиматериальной точки (АМТ) противоположным

$$\vec{L}^{п} = \vec{p} \times \vec{r}\ , \qquad (8.103\ в)$$

где ***r*** *– расстояние от истинного центра антисингулярной области до АМТ.*

p *=* ***v****μ – мгновенное значение импульса АМТ.*

Или в координатном виде

$$L_x^п = zp_y - yp_z;$$
$$L_y^п = xp_z - zp_x; \qquad (8.103\ г)$$
$$L_z^п = yp_x - xp_y;$$

При сравнении (8.103 б) и (8.103 г) видим, что в рамках Алсигны моменты импульса материальных точек «электрона» и «позитрона» противоположны:

$$L_x^э = -L_x^п; \quad L_y^э = -L_y^п; \quad L_z^э = -L_z^п; \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}^{э} = -\vec{L}^{п};$$

В данном пункте рассматривается только модель электрона. Поэтому будем пользоваться только выражениями (8.103 б) и дополнительные индексы для обозначения «электрона» или «позитрона» не используются. Теория момента импульса АМТ «позитрона» совершенно аналогична с учетом противоположных знаков его компонент (8.103 д).

Состояние МТ, хаотически блуждающей в центрально симметричном поле *U* (*r*) сил «упругости», стремящихся вернуть ее в центр сингулярной области, описывается уравнением Шредингера (8.101)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi+U(r)\psi,$$

где $\psi = \psi(r, t)$ – плотность амплитуды вероятности обнаружить материальную «точку» в любой точке в окрестности центра исследуемой сингулярности;

$U(r)$ – потенциальная энергия;

$\hbar$ – постоянная Планка;

μ – масса элементарной точки;

С учетом (8.103)

$$\psi(r,t)=\psi(r)\exp\left\{-i(\frac{E_T t)}{\hbar})\right\},$$

из (8.103 д) имеем

$$\nabla^2\psi+\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-U(r)]\psi=0, \qquad (8.103 \text{ д})$$

Для рассмотрения поведения МТ в центрально симметричном поле $U(r)$ удобней пользоваться сферическими координатами. Как известно оператор Лапласа ∇^2 в сферических координатах имеет вид [30]

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\nabla^2_{\theta,\varphi}}{r^2}, \qquad (8.103 \text{ е})$$

где

$$\nabla^2_{\theta,\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (8.103 \text{ ж})$$

Подставляя (8.103 е) в уравнение Шредингера (8.103 д) и полагая

$$\psi(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi),$$

получим [30]

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-U(r)]=-\frac{1}{Y}\nabla^2_{\theta,\varphi}Y. \qquad (8.103 \text{ з})$$

Так как левая и правая части этого равенства зависят от различных независимых переменных, то эти части по отдельности должны быть равными одной и той же постоянной которую обычно обозначают λ.

Таким образом, для радикальной функции $R(r)$ и сферической функции $Y(\theta,\varphi)$ имеем уравнения [30]

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\left\{\frac{2\mu}{\hbar^2}[E-U(r)]-\frac{\lambda}{r^2}\right\}R=0, \qquad (8.103 \text{ и})$$

и

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0. \qquad (8.102 \text{ й})$$

В уравнение (8.103 и) входит потенциальная энергия $U(r)$. Поэтому вид радиальных функций и собственные значения энергии определяется конкретным видом сферически симметричного поля, в котором блуждает МТ.

Уравнение (8.103 й) для всех сферически-симметричных полей одинаково и допускает дальнейшее разделение переменных. Пологая

$$Y(\theta,\varphi) = P(\theta)\,\Phi(\varphi) \qquad (8.103 \text{ к})$$

и обозначая постоянную разделения через η^2, для функций P и Φ находим следующие уравнения [30]

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\eta^2\Phi=0\,, \qquad (8.103\text{ л})$$

и

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)P=0\,. \qquad (8.103\text{ м})$$

Общее решение уравнения (8.103 л) имеет вид

$$\Phi(\varphi)=Ae^{i\eta\varphi}+Be^{-i\eta\varphi}\,.$$

Из требования однозначности решения вытекает, что η должно быть любым положительным или отрицательным целым числом. Поэтому собственные функции уравнения (8.103 л) могут быть представлены формулой

$$\Phi_n(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in\varphi}\quad \text{где } (n=0,\,\pm1,\pm2,\ldots). \qquad (8.103\text{ н})$$

Для решения (8.103 м) перейдем к независимой переменной $\xi=\cos\theta$. При этом вместо (8.103 м) имеем

$$\frac{d}{d\xi}\left(\left(1-\xi^2\right)\frac{dP}{d\xi}\right)+\left(\lambda-\frac{1}{1-\xi^2}\right)P=0\,. \qquad (8.103\text{ о})$$

Функция $P(\cos\theta)$ должна быть непрерывной и конечной при всех углах θ. Чтобы удовлетворить этому условию параметр λ должен быть равен

$$\lambda = l\,(l+1), \qquad (8.103\text{ п})$$

где l – неотрицательное целое число.

Решение уравнения (8.103 о) при этом может быть представлено в виде присоединенных функций Лежандра

$$P_l^n=\frac{d}{2^l l!}\left(1-\xi^2\right)^{n/2}\frac{d^{l+n}}{d\xi^{l+n}}+\left(\xi^2-1\right). \qquad (8.103\text{ р})$$

При заданном числе l число n может принимать лишь $2\,l\,+1$ различных значений:

$$n=-\,l\,,\ -l+1,\ \ldots,\ l-1,\ l$$

Условие нормировки для функции ψ

$$\int\psi^*\psi\ dxdydz=1. \qquad (8.103\text{ с})$$

Сводится к двум уравнениям

$$\int R^*R\,r^2dr=1\,,$$

$$\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}Y^*Y\,d\varphi=1\,.$$

Запишем собственные функции уравнения (8.103 й) следующим образом

$$Y_l^n(\theta,\varphi)=C_l^n e^{in\varphi}P_l^n(\cos\theta)$$

Воспользовавшись интегралами

$$\int_0^{2\pi}e^{i(n-n')\varphi}d\varphi=2\pi\delta_{nn'}\,,$$

$$\int_{-1}^{1} P_l^n(x) P_{l'}^n(x) dx = \frac{2(l+n)!}{(2l+1)(l-n)!}\delta_{ll'},$$

находим

$$C_l^n = \left[\frac{(2l+1)(l-n)!}{4\pi(l+n)!}\right]^{1/2}$$

В результате с учетом условия нормировки для (8.103 к) окончательно имеем [30]

$$Y_l^n(\theta,\varphi) = \left[\frac{(2l+1)(l-n)!}{4\pi(l+n)!}\right]^{1/2} e^{in\varphi} P_l^n(\cos\theta) \qquad (8.103\ т)$$

Вернемся к рассмотрению момента импульса хаотически блуждающей МТ возле центра сингулярности. С учетом (8.102 л) поставим проекциям момента импульса МТ (8.103 б) квантово-механические операторы:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right);$$
$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right); \qquad (8.103\ у)$$
$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right);$$

В сферической системе координат вместо (8.103 у) имеем

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - ctg\theta\,\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right);$$
$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - ctg\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right);$$
$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi};$$

При этом оператор квадрата модуля момента импульса равен

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2\nabla^2_{\theta,\varphi}. \qquad (8.103\ у)$$

где

$$\nabla^2_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

совпадает с оператором Лапласа (8.103 ж). На основании уравнения (8.102 й) с $\lambda = l\,(l+1)$ и (8.103 н) следует, что собственные значения операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}_z$ равны соответственно

$$L^2 = \hbar^2 l\,(l+1) \qquad (8.103\ ф)$$

$$L_z = \hbar\, n \qquad (8.103\ х)$$

Оператор кинетической энергии хаотически блуждающей материальной точки

$$\hat{E} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2_{\theta,\varphi}}{r^2}\ , \qquad (8.103\ ц)$$

с учетом (8.103 у) может быть записан в виде

$$\hat{E} = \hat{E}_r + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} \qquad (8.103\ ч)$$

где

$$\hat{E}_r = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) \qquad (8.103\ ш)$$

– оператор кинетической энергии радиального движения блуждающей МТ.

8.4.2. Момент импульса блуждающей антиматериальной точки «позитрона»

В предыдущем пункте рассуждения касались только хаотического движения материальной точки возле «истинного» центра сингулярной (особенной) области $\lambda_{-11\ ?\ -14}$-вакуума, которую мы называем «электроном». Чтобы исследовать блуждание антиматериальной точки «позитрона» нужно во всех выше приведенных формулах лишь заменить пространственные координаты на противоположные.

Напомним, что МТ «электрона» – это «верхушка» 3-мерной **выпуклости** $\lambda_{-11\ ?\ -14}$-вакуума, а АМТ «позитрона» – это верхушка точно также устроенной **вогнутости** того же $\lambda_{-11\ ?\ -14}$-вакуума.

Формально 3-мерная **выпуклость** заменяется 3-мерной **вогнутостью** по средством замены координат на противоположные

$$x \to -x; \quad y \to -y; \quad z \to -z \qquad (8.103\ щ)$$

или заменой сферических координат $r,\ \theta,\ \varphi$ на

$$r \to r; \quad \theta \to \pi - x; \quad \varphi \to \varphi + \pi. \qquad (8.103\ э)$$

Уравнение Шредингера для антиматериалной точки, блуждающей в центрально симметричном поле «позитрона», так же получается заменой в (8.103 з) координат x, y, z (или $r,\ \theta,\ \varphi$) на противоположные (8.103 щ) (или (8.103 э)).

Но уравнение Шредингера (8.103 з) для сферически симметричного случая не изменяется при замене координат (8.103 щ) (или (8.103 э)). То есть все операторы, входящие в выражение (8.103 д) или (8.103 з), оказались четными функциями координат. Потому собственные функции и собственные значения оператора Гамильтона для антиматериальной точки (АМТ) «позитрона» будут совершенно такими же, как и для МТ «электрона». Только компоненты момента импульса блуждающей АМТ «позитрона» (8.103 г) противоположны по отношению к компонентам момента импульса МТ «электрона» (8.103 *б*).

В этом и проявляется всеобщий принцип отсутственности гласящий, что каждой сущности проявленной из вакуума, противостоит «антисущность», и каждому движению – антидвижение.