

8.5. Рассеяние электромагнитных волн на подстилающих поверхностях с различными статистиками высот неровностей (*)

Нижеследующее несколько выделяется из общего контекста настоящего исследования, но имеет важное значение по двум причинам. Во-первых, демонстрирует, что процедура перехода от координатного представления (т. е. ПРВ координат случайного стационарного процесса) к импульсному представлению (т. е. к ПРВ производной от исходного процесса) (8.36) – (8.39) вовсе не эксклюзивная специфика квантовой механики, а вполне тривиальная математическая процедура, пригодная для различных отраслей знания. Во-вторых, в завершение данного раздела окончательно развенчивается миф о волновой природе элементарных частиц. Выясняется, что явление дифракции элементарных частиц на кристаллических решетках твердых тел вполне объяснимо без привлечения представлений о мифических волнах де Бройля.

Приведенные ниже материалы – это часть результатов диссертационной работы на соискание степени кандидата технических наук по специальности «Радиолокация и радионавигация», выполненной автором данного исследования в период 1993 –1995 гг. в стенах Московского института инженеров гражданской авиации [52].

8.5.1. Метод расчета коэффициента рассеяния для приближения Кирхгофа

Безбожники боятся всех, кроме Б-ГА.
Адам Давидов

Рассматриваемая ниже задача рассеяния электромагнитных волн на неровных подстилающих поверхностях является узкоприкладной радиофизической задачей и требует знакомства с соответствующей специальной литературой. Мы все же постараемся ввести в курс дела как можно более популярнее.

Данная задача возникает всякий раз, когда источники излучения радиоволн находятся вблизи от поверхности земли или моря (которые в специальной литературе принято называть подстилающими поверхностями). Отраженные от подстилающих поверхностей радиосигналы оказывают ощутимое влияние на помехоустойчивость и точностные характеристики многих радиотехнических устройств. Поэтому задача рассеяния электромагнитных волн на неровных подстилающих поверхностях представляет отдельный прикладной интерес, но при всем этом она, как и любое другое знание, имеет и общепознавательное значение.

Если вам при полете на самолете доводилось видеть отражение солнечных лучей от поверхности водоемов или в безоблачную ночь наблюдать лунную дорожку на поверхности реки или моря, то вы вполне можете представить, о каких отражениях электромагнитных волн идет речь в данном разделе.

Многочисленные исследования рассеяния радиоволн на подстилающих поверхностях показали, что характер рассеяния сильно зависит от соотношения длины электромагнитной волны λ к характерным размерам неровностей поверхности $r_{кр}$, (где $r_{кр}$ – усредненный радиус кривизны характерных неровностей).

В данном разделе рассматривается конкретный случай, когда длина волны монохроматического радиосигнала много меньше характерных масштабов неровностей подстилающей поверхности, т. е. $\lambda \ll r_{кр}$. При этом можно считать, что поверхность состоит из ровных площадок (фацетов) (рис. 8.3), являющихся по сути участками касательных плоскостей к неровностям поверхности. Такую поверхность будем называть крупномасштабной по отношению к длине волны рассеиваемого сигнала.

Недавно от парижского ювелира я с интересом узнал, что фацет (фасет) – это профессиональный термин, означающий грань бриллианта.

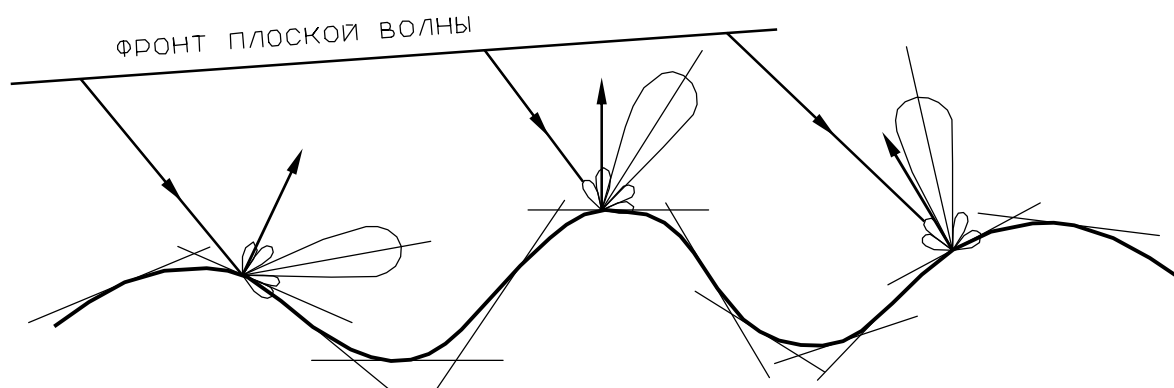


Рис. 8.3

Как будет показано ниже, задача рассеяния электромагнитных волн на крупномасштабных статистически неровных поверхностях сводится к задаче отражения луча электромагнитной волны (ЭМВ) от одного произвольно ориентированного facets. Здесь и в дальнейшем под лучом электромагнитной волны подразумевается цилиндр, осью которого является эйконал, соединяющий источник (или приемник) ЭМВ с центром отражающего facets, а радиус основания этого цилиндра примерно совпадает с линейным размером того же facets.

Сечение диаграммы рассеяния по напряженности плоской ЭМВ на i -м facets прямоугольной формы, как известно, задается выражением

$$D_p = \frac{\sin\left(\frac{\pi b_n}{\lambda}(\cos \vartheta + \cos \nu)\right)}{\frac{\pi b_n}{\lambda}(\cos \vartheta + \cos \nu)}, \tag{8.103}$$

где b_n – линейный размер квадратного facets;

λ – длина ЭМВ.

Диаграмма рассеяния, рассчитанная по формуле (8.103), и углы ϑ, ν показаны на рис. 8.4.

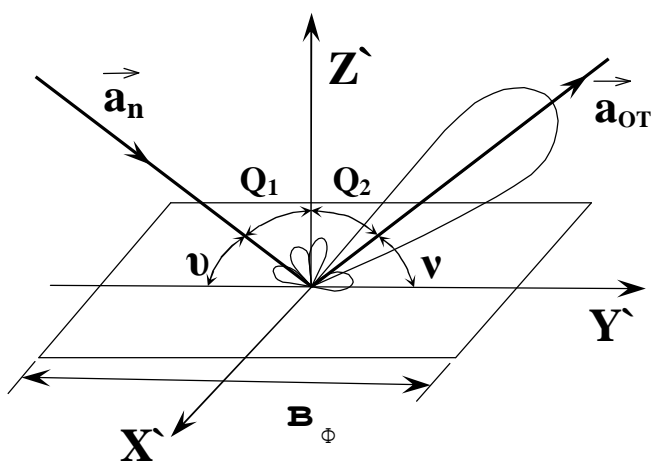


Рис. 8.4

Из выражения (8.103) следует, что при $b_n \gg \lambda$ facets можно считать касательной плоскостью к поверхности, а диаграмма рассеяния вырождается в тонкий луч практически без боковых лепестков. При этом отражение от i -го facets можно рассматривать на основании методов геометрической оптики.

Допустим, что линейный размер облучаемого участка поверхности R_y , значительно меньше расстояний от центра облучаемого участка до передатчика и приемника ($R_y \ll r_2, R_y \ll r_4$) (рис. 8.4). Тогда, как показано на рис. 8.5, в на-

правлении приемника переизлучают только те facets, которые ориентированы так, что выполняются законы геометрической оптики: 1) угол падения равен углу отражения ($Q_1 = Q_2$); 2) отраженный в направлении приемника луч лежит в плоскости падения.

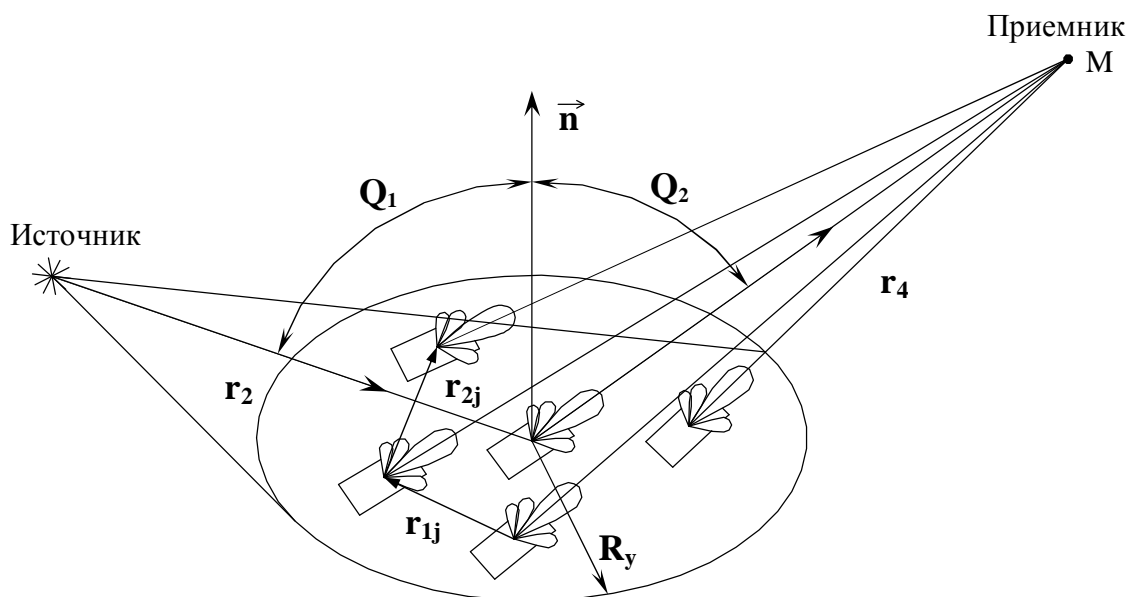


Рис. 8.5.

Таким образом, каждый фаcet можно рассматривать как вторичный источник, переизлучающий узконаправленный сигнал только в том направлении, которое обусловлено вышеперечисленными законами геометрической оптики. При этом полная мощность сигнала от всех этих фaцетов в точке приема равна

$$P_{OT} = \sum_{n=1}^{N_1} P_n + \operatorname{Re} \left(\sum_{n \neq p}^{N_1 N_1} \Gamma_{np}^0 \sqrt{P_n P_p} \exp \left\{ (kr_{np} + \varphi_n - \varphi_p) \right\} \right), \quad (8.104)$$

где

- N_1 – число фaцетов, переизлучающих приблизительно в одном и том же направлении на приемник;
- P_n и P_p – мощности сигналов, отраженных от n -го и p -го фaцетов в достаточно удаленной точке приема;
- φ_n и φ_p – фазы сигналов, отраженных от n -го и p -го фaцетов в точке приема;
- $|\Gamma_{np}^0|$ – степень когерентности сигналов, отраженных от n -го и p -го фaцетов;
- r_{np} – расстояние между n -м и p -м фaцетами;
- $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Учитывая, что мощность сигнала, отраженного от n -го фaцета, пропорциональна площади этого фaцета и предполагая, что все фaцеты имеют примерно одну и ту же площадь, выражение (8.104) можно представить в виде

$$P_{OT} = \Pi_{II} \left| \dot{R}_k(\varepsilon, \gamma_n, Q_1, Q_2) \right|^2 \bar{S}_{эф}, \quad (8.105)$$

где Π_{II} – плотность потока мощности сигнала от источника излучения в районе используемой подстилающей поверхности;

$\left| \dot{R}_k(\varepsilon, \gamma_n, Q_1, Q_2) \right|$ – модуль функции комплексного коэффициента отражения Френеля для рассматриваемого направления, показывающий потери мощности при отражении луча электромагнитной волны от n -го фaцета за счет поглощения;

$$\bar{S}_{эф} = \sum_{n=1}^{N_1} \bar{S}_{fn} + \operatorname{Re} \left(\sum_{n \neq p}^{N_1 N_1} \Gamma_{np}^0 \sqrt{\bar{S}_{fn} \bar{S}_{fp}} \exp \left\{ (kr_{np} + \varphi_n - \varphi_p) \right\} \right) \quad (8.106)$$

– эффективная площадь фaцетов, отражающих в направлении точки наблюдения, где \bar{S}_{fn} – усредненная эффективная площадь n -го фaцета.

В случае крупномасштабных неровностей и при больших значениях N_1 выражение (8.106) может быть сведено к приближенному равенству

$$\bar{S}_{эф} \approx \sum_{n=1}^{N_1} \bar{S}_{эф} (1 \pm \delta_1), \quad (8.107)$$

где δ_1 – малая поправка, которая может быть оценена соотношением

$$\delta_1 < \left(\frac{2\pi}{\lambda} \min |r_{np}| \right)^{-1} |\Gamma_{np}^0| (1,5 + \ell n(N_1 - 1)), \quad (8.108)$$

где $\min |r_{np}|$ – минимальное расстояние между n -м и p -м фaцетами, отражающими лучи в одном и том же направлении.

Поправкой δ_1 можно пренебречь, если выполняется условие

$$\frac{2\pi}{\lambda} \min |r_{np}| \gg 1, \quad (8.109)$$

и/или степень когерентности $|\Gamma_{np}^0|$ стремится к нулю

$$|\Gamma_{np}^0| \approx 0. \quad (8.110)$$

Условие (8.110) выполняется, если фазы сигналов, отраженных от одинаково переизлучающих фaцетов некоррелированы и распределены по произвольному закону с дисперсией, значительно превышающей π^2 . Для

реальных неподвижных земных поверхностей условия (8.109) и (8.110) зависят от радиуса корреляции $r_{\text{кор}}$ и дисперсии высот неровностей поверхности σ_ξ . Чем больше σ_ξ и $r_{\text{кор}}$ по отношению к длине волны, тем меньше вероятность того, что два лежащих вблизи facets будут ориентированы одинаково. Поэтому для того, чтобы выполнялось соотношение $\delta_1 \ll 1$, необходимо выполнение условия

$$\sigma_\xi r_{\text{кор}} \gg \lambda^2. \quad (8.111)$$

При этом рассеивание ЭМВ на подстилающей поверхности можно считать некогерентным, а мощность сигнала в точке приема в данном случае, согласно (8.105) и (8.107), равна

$$P_{\text{от}} \approx \Pi_{\Pi} \left| \dot{R}_k \left| \sum_{n=1}^{N_1} \bar{S}_{\phi n} \right. \right|^2 \approx \Pi_{\Pi} \left| \dot{R}_k \right|^2 N_1 \bar{S}_{\phi n}. \quad (8.112)$$

На практике сигналы, рассеянные на подстилающей поверхности, всегда являются частично когерентными, поэтому на диаграмме рассеяния могут иметь место флуктуации (см. рис. 3.3а), величина которых может быть оценена соотношением (8.108). Причем флуктуации тем заметнее, чем индикатриса рассеяния ближе к нулю. Это обусловлено тем, что малая величина потока мощности связана с малым числом facets, переизлучающих в данном направлении. Поэтому когерентная составляющая суммарного сигнала в данном направлении практически не компенсируется даже при большом разбросе фаз гармонических сигналов, переотраженных от малого числа facets. Однако в дальнейшем будем считать, что условия (8.111) выполняются и выражение (8.112) справедливо для всех направлений распространения рассеянной ЭВМ.

Полная мощность плоской электромагнитной волны P_{Π} , падающей на исследуемый участок подстилающей поверхности, приближенно равна

$$P_{\Pi} \approx N_{\Pi\Phi} \bar{S}_{\phi n} \Pi_{\Pi}, \quad (8.113)$$

где $N_{\Pi\Phi}$ – полное число facets, покрывающих облучаемый участок поверхности.

Разделив (8.112) на (8.113), получим коэффициент рассеяния радиосигнала на крупномасштабной поверхности в направлении приемника

$$k_p = \frac{P_{\text{от}}}{P_{\Pi}} \approx \frac{N_1 \left| \dot{R}_k(\epsilon, \gamma_{\Pi}, Q_1, Q_2) \right|^2}{N_{\Pi\Phi}}. \quad (8.114)$$

Но (8.114) – это практически не что иное, как статистическая частота того, что на подстилающей поверхности окажется N_1 площадок, отражающих в заданном направлении

$$P_k = (v, \omega | \mathcal{G}, \gamma) = \frac{N_1}{N_{\Pi\Phi}}. \quad (8.115)$$

При большом числе facets частоту (8.115)

$$P_k = \lim_{N_{\Pi\Phi} \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N_{\Pi\Phi}} \quad (8.116)$$

можно рассматривать как вероятность того, что facet будет ориентирован так, что падающая волна при выполнении законов геометрической оптики отразится в направлении приемника, или, что то же самое

$$P_k = P(v, \omega | \mathcal{G}, \gamma), \quad (8.117)$$

где $P(v, \omega | \mathcal{G}, \gamma)$ – вероятность того, что луч ЭМВ отражается от facets в направлении приемника под углами v и ω при условии, что направление падающей на подстилающую поверхность волны задано углами \mathcal{G}, γ .

Таким образом, для определения коэффициента рассеяния ЭМВ на поверхности с крупномасштабными неровностями необходимо найти вероятность $P(v, \omega | \mathcal{G}, \gamma)$. Решение этой задачи рассматривается в следующем пункте.

8.5.2. Определение вероятности направления распространения ЭМВ, рассеянной на крупномасштабной статистически неровной поверхности (*)

Блезу Паскалю принадлежит высказывание: «Азарт равен величине ставки умноженной на вероятность выигрыша». Отсюда Паскаль вывел, что возможность достичь вечное блаженство на Небесах обладает бесконечно большой ценностью, а вероятность попасть на Небо после смерти заведомо конечна. Следовательно, религия бесконечно привлекательна для верующих в Б-ГА.

Рассмотрим сначала одномерную (цилиндрическую) поверхность, показанную на рис. 8.6а,б.

Пусть луч электромагнитной волны, заданный вектором \vec{a}_n , показанным на рис. 8.6, падает на поверхность в плоскости XOZ и отражается в некоторой точке по закону геометрической оптики в направлении $\vec{a}_{от}$, тогда между углами β , ν и ψ , показанными на этом же рисунке, существуют однозначные аналитические связи

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\nu + \vartheta - \pi}{2}, \\ \beta &= \psi - \frac{\pi}{2}, \\ \psi &= \frac{\nu + \vartheta}{2}.\end{aligned}\tag{8.118}$$

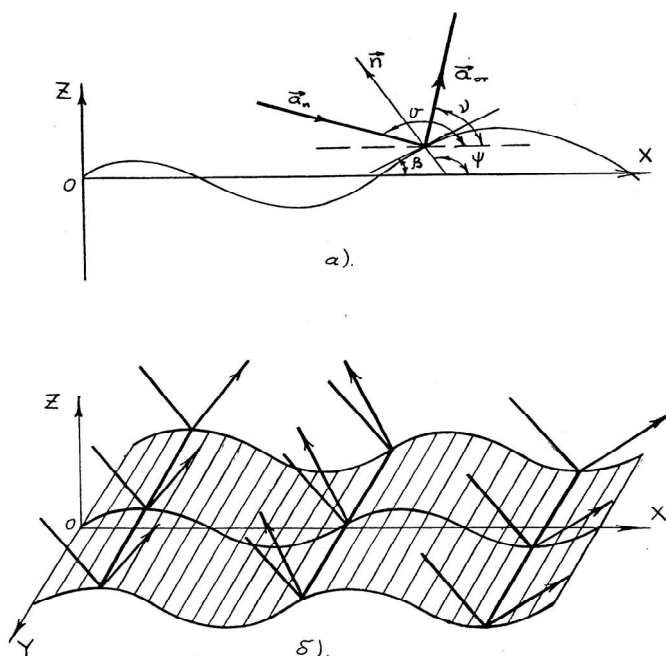


Рис. 8.6

Поэтому если известна ПРВ $\rho(\beta)$ (где β – угол между факетом и горизонталью (осью x)) или ПРВ $\rho(\psi)$ (ψ – угол между нормалью к факету и горизонталью), то простой заменой переменной β на ν , связанных соотношением (8.118) с якобианом преобразования $|\mathfrak{J}_\nu| = 1$, легко найти ПРВ $\rho(\nu)$ – направления рассеяния луча ЭМВ под углом ν при известном угле ϑ между падающим лучом и горизонталью

$$\rho(\beta) = \rho\left(\frac{\nu + \vartheta - \pi}{2}\right) |\mathfrak{I}_\nu| \quad (8.119)$$

Или, заменяя φ на ν , с учетом (8.119), получим

$$\rho(\psi) = \rho\left(\frac{\nu + \vartheta}{2}\right) |\mathfrak{I}_\nu|. \quad (8.120)$$

При этом вероятность того, что отраженная волна будет рассеяна в направлении углов $d\nu$, равна

$$P(\nu, \omega = 0 | \vartheta, \gamma = 0) = \rho\left(\frac{\nu + \vartheta}{2}\right) |\mathfrak{I}_\nu| d\nu. \quad (8.121)$$

где все углы показаны на рис. 8.6.

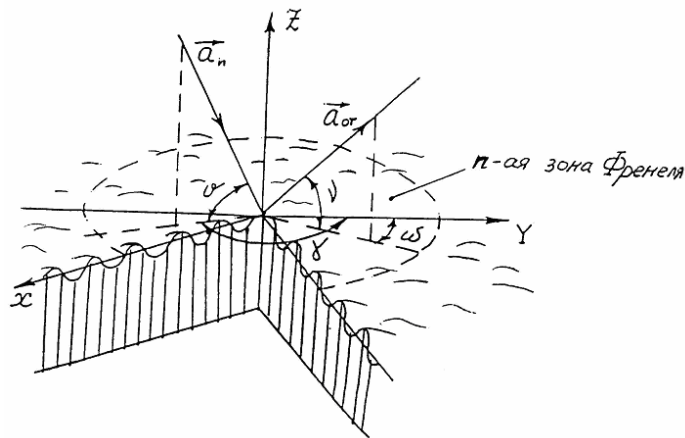


Рис. 8.7

Таким образом, коэффициент рассеяния в направлении углов $d\nu$ для одномерной (цилиндрической) поверхности (рис. 8.6), с учетом (8.114), (8.116), (8.117) и (8.119), равен

$$\kappa_\rho(\nu) = \rho\left(\frac{\nu + \vartheta}{2}\right) |\mathfrak{I}_\nu| \left| R_k(\varepsilon, \gamma_n, \nu, \vartheta) \right|^2. \quad (8.122)$$

Здесь учтено, что углы Q_1 , Q_2 и ϑ , ν связаны соотношениями

$$\begin{cases} Q_1 = \vartheta - \frac{\pi}{2} \\ Q_2 = \frac{\pi}{2} - \nu \end{cases}. \quad (8.123)$$

Рассмотрим теперь двухмерную, однородную неровную подстилающую поверхность (см. рис. 8.7 и 8.8).

Пусть, как показано на этих рисунках, углы ϑ , γ задают направление падающего луча ЭМВ, углы ψ и φ задают направление нормали к факету, касательному к рассматриваемой поверхности в точке касания луча ЭМВ этой поверхности, а углы ν , ω задают направление отраженного луча ЭМВ. Теперь с помощью законов геометрической оптики и методов аналитической геометрии можно получить однозначные аналитические связи между углами ν , ω , ϑ , γ и ψ , φ :

$$\psi = f_3(v, \omega | \vartheta, \gamma); \quad (8.124)$$

$$\varphi = f_4(v, \omega | \vartheta, \gamma). \quad (8.125)$$

Поэтому если зависимости (8.124) и (8.125) будут установлены и будет задана двумерная ПРВ $\rho(\psi, \varphi)$ углов ψ, φ , задающих направление нормали к facetsу, на который падает луч ЭМВ, то, делая замену переменных, согласно (8.124) и (8.125), из $\rho(\psi, \varphi)$, получим

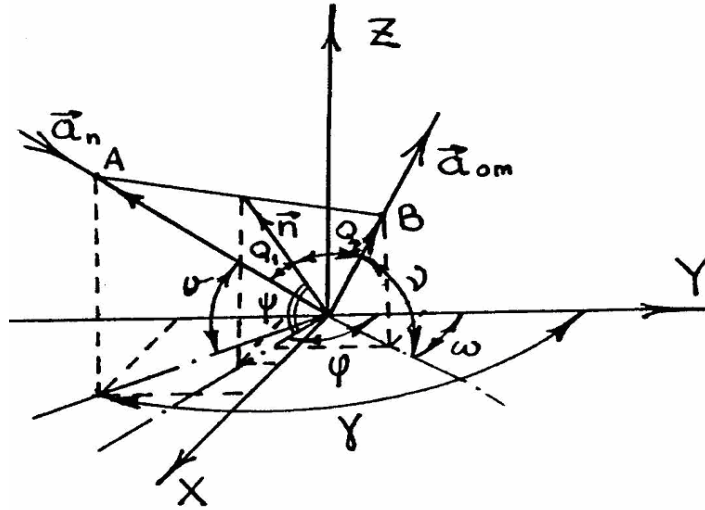


Рис. 8.8

$$\rho(v, \vartheta) = \rho(\psi = f_3(v, \omega | \vartheta, \gamma); \varphi = f_4(v, \omega | \vartheta, \gamma)) \mathfrak{F}_{v\omega} = \rho(v, \omega | \vartheta, \gamma) \mathfrak{F}_{v\omega}. \quad (8.126)$$

Соответственно коэффициент рассеяния, согласно (8.122), примет вид

$$k_p(v, \omega) = \rho(v, \omega | \vartheta, \gamma) \mathfrak{F}_{v\omega} |dvd\omega| R_k(v, \omega, \vartheta, \gamma)^2. \quad (8.127)$$

Таким образом, для определения $k_p(v, \omega)$ при выполнении условий приближения Кирхгофа (8.111) (т. е. крупномасштабных неровностей) необходимо получить ПРВ $\rho(v, \omega | \vartheta, \gamma)$ того, что луч ЭМВ отразится от i -го facetsу в направлении углов v и ϑ при условии, что падающий луч задается углами ϑ и γ .

8.5.3. Связь углов, задающих направление нормали к facetsу падающего и отраженного лучей при выполнении законов геометрической оптики (*)

В п. 8.5.2 было показано, что для определения искомой ПРВ, согласно (8.124), (8.125) и (8.126), необходимо найти аналитическую связь между углами v, ω, ϑ и γ, ψ, φ . Поэтому займемся определением данной связи.

Пусть задан единичный вектор

$$\vec{a}_n = \{a_{nx}, a_{ny}, a_{nz}\} = \{\cos \vartheta \sin \gamma, \cos \vartheta \cos \gamma, \sin \vartheta\}, \quad (8.128)$$

определяющий направление луча, падающего на facets, нормаль которого задана вектором (рис. 8.7, 8.8)

$$\vec{n} = \{\cos \psi \sin \varphi, \cos \psi \cos \varphi, \sin \psi\} \quad (8.129)$$

Пусть также определен единичный вектор

$$\vec{a}_{от} = \{a_{отx}, a_{отy}, a_{отz}\} = \{\cos v \sin \omega, \cos v \cos \omega, \sin v\} \quad (8.130)$$

задающий направление луча, отраженного от данного facets.

Согласно законам геометрической оптики, луч ЭМВ, падающий на произвольно ориентированный facet и луч ЭМВ, отраженный от того же facets, лежат в одной плоскости с нормалью \vec{n} к этому facets, а углы, образованные векторами \vec{a}_n, \vec{n} и $\vec{a}_{от}, \vec{n}$, равны (т. е. угол падения равен углу отражения). Поэтому удается найти искомые аналитические связи (8.124), (8.125).

Получим сначала зависимость (8.124). Поскольку вектора \vec{a} и $\vec{a}_{от}$ единичные, то конец вектора \vec{n} должен лежать на середине отрезка AB (см. рис. 8.8), так как биссектриса проходит через середину основания равнобедренного треугольника AOB . То, что \vec{n} задает направление биссектрисы, вытекает из равенства углов падения и отражения $Q_1 = Q_2$ (см. рис. 8.8). Поэтому, воспользовавшись аналитической геометрией, легко получим координаты вектора, определяющего направление нормали к рассматриваемому facets, выраженные через переменные v и ω :

$$\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\} = \left\{ \frac{\cos v \sin \omega + \cos \vartheta \sin \gamma}{2}; \frac{\cos v \cos \omega + \cos \vartheta \cos \gamma}{2}; \frac{\sin v + \sin \vartheta}{2} \right\}. \quad (8.131)$$

Теперь с помощью скалярного произведения векторов \vec{n} и \vec{k} (0,0,1) (\vec{k} – задает направление оси OZ) нетрудно найти угол ψ , который, как показано на рис. 8.8, равен

$$\begin{aligned} \psi &= \pi/2 - \frac{\langle \vec{n}, \vec{k} \rangle}{|\vec{n}| |\vec{k}|} = (\psi, \omega | \vartheta, \gamma) = \\ &= \arcsin \left\{ \frac{(\sin v + \sin \vartheta)}{\sqrt{(\cos v \sin \omega + \cos \vartheta \sin \gamma)^2 + (\cos v \cos \omega + \cos \vartheta \cos \gamma)^2}} (\sin v + \sin \vartheta) \right\}. \end{aligned} \quad (8.132)$$

Таким образом, первая искомая зависимость (8.124) найдена.

Определим теперь зависимость (8.125). Для этого найдем сначала координаты вектора \vec{a}_1 перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора \vec{n} и \vec{k} . С помощью векторного произведения векторов легко получим

$$\vec{a}_1 = [\vec{k} \times \vec{n}] = \{a_{1x}; a_{1y}; a_{1z}\} = \left\{ -\frac{(\cos v \cos \omega + \cos \vartheta \cos \gamma)}{2}; \frac{\cos v \sin \omega + \cos \vartheta \sin \gamma}{2}; 0 \right\}. \quad (8.133)$$

Воспользуемся теперь известной теоремой о том, что двухгранный угол между двумя пересекающимися плоскостями равен углу между пересекающимися перпендикулярами к этим плоскостям. Из этой теоремы следует, что угол φ можно определить с помощью скалярного произведения векторов \vec{a} и $\vec{i} = (1, 0, 0)$ (вектор \vec{i} задает направление, перпендикулярное плоскости ZOY), которые задают направления перпендикуляров к плоскостям, образующим двухгранный угол φ (рис. 8.8). Таким образом,

$$\varphi = \arccos \left(\pm \frac{(\vec{i} \cdot \vec{a}_1)}{|\vec{a}_1| |\vec{i}|} \right),$$

или с учетом (8.133) окончательно получим

$$\varphi = f_4(v, \omega | \vartheta, \gamma) = \arccos \left(\pm \frac{\cos v \cos \omega + \cos \vartheta \cos \gamma}{\sqrt{(\cos v \cos \omega + \cos \vartheta \cos \gamma)^2 + (\cos v \sin \omega + \cos \vartheta \sin \gamma)^2}} \right). \quad (8.134)$$

Следовательно, согласно законам геометрической оптики, углы ψ и φ , задающие направления нормали к рассматриваемому facets, связаны соотношениями (8.132) и (8.134) с углами ϑ, γ, v и ω , задающими направления падающего и отраженного лучей ЭМВ.

8.5.4. Якобиан преобразования переменных ψ, φ к переменным ν и ω при заданных ϑ и γ (*)

Определим теперь якобиан преобразования переменных ψ и φ к переменным ν и ω на основании полученных в предыдущем пункте аналитических зависимостей (8.132) и (8.134). Введем обозначения

$$\begin{cases} a = \cos \nu \cos \omega + \cos \vartheta \cos \gamma; \\ b = \cos \nu \sin \omega + \cos \vartheta \sin \gamma; \\ c = \sin \nu + \sin \vartheta; \\ a'_\nu = -\sin \nu \cos \omega; \\ b'_\nu = -\sin \nu \sin \omega; \\ c'_\nu = \cos \nu; \\ a'_\omega = -\cos \nu \sin \omega; \\ b'_\omega = \cos \nu \cos \omega. \end{cases} \quad (8.135)$$

Эти выражения с учетом многозначности обратных тригонометрических функций можно представить в виде

$$\psi = f_3(\nu, \omega, \vartheta, \gamma) = m\pi + (-1)^m \arcsin \left\{ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right\}, \quad (8.136)$$

$$\varphi = f_4(\nu, \omega, \vartheta, \gamma) = 2\pi m \pm \arccos \left\{ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}, \quad (8.137)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

Из физических и геометрических соображений следует, что нормаль к facetsу, касательному к непрерывной поверхности в верхнем полупространстве, может быть ориентирована так, что задающие ее углы могут принимать любое значение из интервалов $\psi \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ или $\psi \in [0, \pi]$; $\varphi \in [0, \pi]$ (см. рис. 8.7), но интервалы однозначности обратных тригонометрических функций, как известно, заключены в пределах

$$\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]; \quad \arccos(x) \in [0, \pi].$$

При этом неоднозначностей в рассматриваемом случае не возникает. Следовательно, в выражениях (8.136) и (8.137) m следует положить равным нулю, при этом окончательно получим

$$\psi = f_3 = \arcsin \left\{ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right\} \quad (8.138)$$

и

$$\varphi = f_4 = \arccos \left\{ \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\}. \quad (8.139)$$

Поэтому преобразование ПРВ от переменных ψ и φ к переменным ν , ω при фиксированных ϑ и γ должно осуществляться по формуле

$$\rho(\psi, \varphi) = \rho \{ f_3(\nu, \omega | \vartheta, \gamma); f_4(\nu, \omega | \vartheta, \gamma) \} |\mathfrak{J}_{\nu\omega}|, \quad (8.140)$$

где

$$|\mathfrak{J}_{\nu\omega}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial \nu} & \frac{\partial f_3}{\partial \omega} \\ \frac{\partial f_4}{\partial \nu} & \frac{\partial f_4}{\partial \omega} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_3}{\partial \nu} \frac{\partial f_4}{\partial \omega} - \frac{\partial f_3}{\partial \omega} \frac{\partial f_4}{\partial \nu} \quad (8.141)$$

– якобиан преобразования.

Функции f_3 и f_4 в данном случае задаются выражениями (8.138), (8.139). Подставляя эти функции в выражение (8.141) с учетом (8.135), после несложных вычислений получим искомым якобиан преобразования

$$|\mathfrak{J}_{\nu\omega}| = \left| \frac{c(a'_\nu b'_\omega - a'_\omega b'_\nu) + c'_\nu (ba'_\omega - b'_\omega a)}{\sqrt{a^2 + b^2} (a^2 + b^2 + c^2)} \right|. \quad (8.142)$$

Данный результат был получен автором совместно с С. В. Костиным.

8.5.5. Способы определения совместной ПРВ углов ψ и φ , задающих направление нормали к статистически неровной дифференцируемой крупномасштабной поверхности (*)

Как было показано в предыдущих пунктах, для определения ПРВ $\rho(\nu, \omega | \vartheta, \gamma)$ необходимо знать ПРВ $\rho(\psi, \varphi)$ углов, задающих направление нормали к facetsу, касательному к неровности поверхности. Для статистически однородных поверхностей возможны два подхода к определению ПРВ $\rho(\psi, \varphi)$:

1. Снятие статистических данных об углах ψ и φ с реальной статистически неровной поверхности, то есть непосредственное измерение этих углов, задающих направление нормалей к различным facetsам исследуемого участка поверхности. Построение гистограмм по статистическим данным для ψ и φ , и установление по ним законов распределения $\rho(\psi, \varphi)$.

2. Снятие статистических данных о высотах неровностей $\xi(x, y)$ и радиусе их корреляции $r_{\text{кор}}$ на исследуемой поверхности. Определение по этим данным ПРВ высот неровностей $\rho(\xi)$. Затем определение $\rho(\psi, \varphi)$ при известных $\rho(\xi)$ и $r_{\text{кор}}$ по следующему алгоритму:

а) с помощью известной ПРВ $\rho(\xi)$ для высот неровностей стационарного случайного процесса $\xi(x)$ получить ПРВ $\rho(\xi')$ для производной от этого процесса $\xi'(x)$. Обозначим эту процедуру следующим образом

$$\widehat{\mathfrak{R}} \{ \rho(\xi(x)) \} = \rho(\xi'(x)), \quad (8.143)$$

где $\widehat{\mathfrak{R}}$ – оператор перехода от $\rho(\xi)$ к $\rho(\xi')$;

б) учитывая, что $\xi'(t_1) = \text{tg } \beta$, где β – угол, образованный касательной к процессу $\xi'(t)$ в точке t_1 с горизонталью (осью t) (см. рис. 8.2, где t – обобщенная координата), делается замена переменной ξ' на β с якобианом

$$|\mathfrak{J}_\beta| = \left| \frac{1}{\cos^2 \beta} \right|.$$

В результате получим:

$$\rho(\xi') = \left[\frac{1}{\cos^2 \beta} \right] \rho(\text{tg } \beta) = \rho(\beta) |\mathfrak{J}_\beta|; \quad (8.144)$$

в) далее, с учетом выражений (8.118) и (8.119), в ПРВ $\rho(\beta)$ делаем еще одну замену переменной β на ψ с якобианом преобразования $|\mathfrak{J}_\psi|=1$. При этом имеем:

$$\rho(\beta) = \left| \frac{1}{\sin^2 \psi} \right| \rho(-ctg\psi) = \rho(\psi) |\mathfrak{J}_\psi|. \quad (8.145)$$

Здесь учтено, что

$$\begin{aligned} tg\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) &= -ctg\psi, \\ \cos\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\psi; \end{aligned} \quad (8.146)$$

г) при статистической независимости углов ψ и φ , что имеет место для многих практически важных случаев, совместная ПРВ $\rho(\psi, \varphi)$, с учетом (8.145), может быть представлена в виде

$$\rho(\psi, \varphi) = \rho(\psi)\rho(\varphi) = \left| \frac{1}{\sin^2 \psi} \right| \rho(-ctg\psi)\rho(\varphi). \quad (8.147)$$

ПРВ $\rho(\psi)$ задается исходя из свойств статистической однородности и изотропности исследуемой поверхности в азимутальных направлениях. Например, для статистически однородной и изотропной поверхности (см. рис. 8.7) угол φ равномерно распределен в интервале от 0 до 2π , при этом его закон распределения задается выражением

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2\pi}. \quad (8.148)$$

Таким образом, для данного случая, согласно (8.147) и (8.148), получим исходную ПРВ

$$\rho(\psi, \varphi) = \frac{1}{2\pi \sin^2 \psi} \rho(-ctg\psi). \quad (8.149)$$

Первый из рассмотренных подходов более прост и позволяет определить $\rho(\psi, \varphi)$ практически для любых поверхностей, для которых выполняется приближение Кирхгофа ($\lambda \ll r_{\text{кор}}$). Однако на основании данного подхода невозможно детально исследовать процесс рассеяния ЭМВ на статистически неровной поверхности, т. к. при этом подходе затруднительно связать коэффициент рассеяния с характером неровностей, в частности с их высотой и радиусом кривизны. Второй подход с точки зрения анализа процесса рассеяния ЭМВ на неровной поверхности является более предпочтительным, но существуют значительные математические трудности, связанные в основном с процедурой перехода от $\rho(\xi)$ к $\rho(\xi')$. Оператор \mathfrak{R} (8.143) оказывается интегральным, поэтому эту процедуру удастся осуществить далеко не для каждой статистики высот неровностей подстилающих поверхностей. В случае, когда можно аналитически получить выражение (8.147), с помощью замены переменных (8.138) и (8.139) с якобианом (8.142) из (8.147) легко получить ПРВ для углов ν и ω при заданных углах \mathcal{G} и γ :

$$\begin{aligned} \rho(\nu, \omega | \mathcal{G}, \gamma) &= \rho\left[\varphi = \arccos\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right]\right] \cdot \left|\frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2}\right| \times \\ &\times \left|\frac{c(a'_\nu b'_\omega - a'_\omega b'_\nu) + c'(ba'_\omega - ab'_\omega)}{\sqrt{a^2 + b^2}(a^2 + b^2 + c^2)}\right| \cdot \rho\left[-\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}}\right] \end{aligned} \quad (8.150)$$

или с учетом (8.148)

$$\rho(\psi, \omega | \vartheta, \gamma) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{c(a'_v b'_\omega - a'_\omega b'_v) + c'(ba'_\omega - ab'_\omega)}{c^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \right| \rho \left[-\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} \right]. \quad (8.151)$$

Здесь учтено, что, согласно (8.138), верны равенства

$$\sin(\psi) = \sin \left[\arcsin \left[\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right] \right] = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad (8.152)$$

$$ctg(\psi) = ctg \left[\arcsin \left[\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right] \right] = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}}, \quad (8.153)$$

$$\cos(\psi) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (8.154)$$

Таким образом, единственной математической проблемой для данного подхода является процедура перехода от ПРВ $\rho(\xi)$ к ПРВ производной $\rho(\zeta)$.

8.5.6. Получение ПРВ производной стационарного гауссовского процесса (*)

«Если есть несколько человек соблюдающих траур в одинаковом положении – пусть бросают жребий, и получивший Кадис по жребию больше не почувствует в жребии, пока не прочтут все остальные» ([166], 26:7).

Процедура преобразования одномерных ПРВ стационарных в узком смысле марковских случайных процессов в ПРВ производной этих процессов приведена в п. 8.2 настоящего исследования. Применим теперь эту процедуру к поставленной в данном разделе задаче.

Пусть в каждом сечении статистически неровной поверхности, заданной в виде марковского, стационарного в узком смысле, случайного процесса, случайная величина ξ (высота неровности) распределена по гауссовскому закону

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp \left\{ -(\xi - m)^2 / 2\sigma_\xi^2 \right\}, \quad (8.155)$$

где σ_ξ – дисперсия высот неровностей поверхности (т. е. среднеквадратическое отклонение процесса $\xi(t)$ от среднего значения).

Будем осуществлять переход к ПРВ производной этого процесса по алгоритму (8.36) – (8.39). Согласно (8.36), представим ПРВ (8.155) в виде произведения двух функций состояния

$$\rho(\xi) = \varphi(\xi_i) \varphi^*(\xi_j), \quad (8.156)$$

где

$$\varphi(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp \left\{ -(\xi_i - m_\xi)^2 / 4\sigma_\xi^2 \right\}, \quad (8.157)$$

$$\varphi^*(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left\{-\frac{(\xi_j - m_\xi)^2}{4\sigma_\xi^2}\right\}, \quad (8.158)$$

здесь m_ξ – математическое ожидание в каждом сечении стационарного процесса $\zeta(t)$.

Зависимость от параметров t_0 и t_2 здесь и в дальнейшем для краткости будем опускать, поскольку процедура (8.36) – (8.39) обеспечивает не только пространственное, но и временное совмещение процессов $\zeta_i(t)$ и $\zeta_j(t)$.

Подставим (8.157) в выражение (8.37)

$$\varphi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left\{-\frac{(\xi_i - m_\xi)^2}{4\sigma_\xi^2}\right\} \exp\left\{-i\xi'\xi_i/h\right\} d\xi_i. \quad (8.159)$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\varphi(\xi') = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi h^2/(2\sigma_\xi)^2}} \exp\left\{-\frac{(\xi'^2)/(2h/(2\sigma_\xi))^2}{4}\right\} \exp\left\{im_\xi\xi'/h\right\}. \quad (8.160)$$

Аналогично, подставляя (8.158) в (8.38), получим

$$\varphi^*(\xi') = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi h^2/(2\sigma_\xi)^2}} \exp\left\{-\frac{(\xi'^2)/(2h/(2\sigma_\xi))^2}{4}\right\} \exp\left\{im_\xi\xi'/h\right\}. \quad (8.161)$$

Далее, после подстановки (8.160) и (8.161) в (8.39), окончательно получим

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1^2}} \exp\left\{-\frac{\xi'^2}{2k_1^2}\right\}, \quad (8.162)$$

где

$$k_1 = \frac{h}{2\sigma_\xi} = \frac{l_0\sigma_\xi^2}{2r_{кор}}$$

– среднеквадратическое отклонение продифференцированного случайного процесса $\zeta'(t)$ от нулевого уровня. Здесь учтено соотношение [см. (8.43)]

$$h = \frac{l_0\sigma_\xi^2}{r_{кор}},$$

где l_0 – безразмерный коэффициент пропорциональности, зависящий от плотности распределения высот неровностей.

Для проверки правильности полученной зависимости (8.162) и выяснения числового значения величины l_0 приведем ПРВ $\rho(\xi')$, полученную на основании двумерной ПРВ $\rho(\zeta_i, \zeta_j)$ стационарного гауссовского процесса $\zeta(t)$ по известному алгоритму (8.7) – (8.10). Для стационарного гауссовского дифференцируемого случайного процесса (СГДСП) двумерная ПРВ (8.7) известна. Поэтому, выполнив процедуры (8.7) – (8.10), получим [14]:

$$\rho(\xi') = \exp\left\{-\frac{(\xi')^2/(2\sigma_{np})}{2\pi\sigma_{np}^2}\right\}^{1/2}, \quad (8.163)$$

где σ_{np} – СКО продифференцированного СГДСП, причем, как известно, дисперсия такого процесса равна [15]:

$$\sigma_{np}^2 = -\sigma_\xi^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} \Big|_{r=0} \approx \sigma_\xi^2 / r_{кор}^2, \quad (8.164)$$

где $R(r)$ – коэффициент корреляции СГДСП, $r_{кор}$ – интервал корреляции исходного процесса. В случае, когда

$$R(r) = \exp\left\{-r^2/r_{кор}^2}\right\}$$

или

$$R(r) = \exp \left\{ -|r|/r_{кор} \right\},$$

выражение (8.164) из приближенного равенства превращается в тождество. Сравнивая ПРВ (8.162) и (8.163), находим, что если $l_0 = 2$, то эти выражения полностью совпадают. При этом, согласно (8.164) и (8.7) – (8.10), $\sigma_{пр} = k_1$, что свидетельствует о правильности предложенного в данной работе алгоритма перехода от ПРВ $\rho(\xi)$ к ПРВ производной $\rho(\xi')$.

8.5.7. ПРВ производной стационарного процесса с равномерным распределением случайной величины ξ (*)

Пусть в каждом сечении марковского непрерывного случайного в узком смысле процесса (МНСУП) случайная величина ξ распределена по равномерному закону в интервале $x_0 < \xi < x_1$:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{x_1 - x_0}. \quad (8.165)$$

Согласно процедуре (8.36) – (8.39), представим ПРВ (8.165) в виде

$$\rho(\xi) = \varphi(\xi_i) \varphi^*(\xi_j),$$

где

$$\varphi(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_0}}, \quad (8.166)$$

$$\varphi^*(\xi_j) = \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_0}}. \quad (8.167)$$

Подставим (8.166) в (8.37) и найдем

$$\varphi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{x_1 - x_0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{x_0}^{x_1} \exp \{ i \xi' \xi_i / h \} d\xi_i = [\exp \{ i x_1 \xi' / h \} - \exp \{ i x_0 \xi' / h \}] \left[\xi' \sqrt{2\pi(x_1 - x_0)/h} \right]^{-1}. \quad (8.168)$$

Если учесть, что $(x_1 + x_0)/2 = m_\xi$, а $x_1 - x_0 = l_1$ – база распределения (8.165), то можно записать $x_1 = l_1 + m_\xi/2$, $x_0 = l_1 - m_\xi/2$. При этом выражение (8.168) примет вид

$$\varphi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{4\pi h \beta_1}} \int_{m_\xi}^0 \exp \left\{ i |\xi_i - m_\xi| / 2\beta_1 - i \xi' \xi_i / h \right\} d\xi_i. \quad (8.169)$$

Аналогично, подставляя (8.167) в (8.38), получим

$$\varphi^*(\xi') = \frac{2 \sin(\xi' l_1 / (2h))}{\sqrt{2\pi l_1 / h}} \exp \{ -i m_\xi \xi' / h \} \quad (8.170)$$

В результате после подстановки (8.169), (8.170) в (8.39) для МНСУП с равномерным распределением случайной величины ξ получим ПРВ производной этого процесса

$$\rho(\xi') = \frac{\sin^2(\xi' k_2)}{\pi k_2 \xi'^2}, \quad (8.171)$$

где

$$k_2 = \frac{l_1}{2h} = \frac{x_1 - x_0}{2h} = \frac{3r_{\text{кор}}}{(x_1 - x_0)}.$$

Здесь также учтено, что, согласно $h = 2\sigma_{\xi}^2 / r_{\text{кор}}$ (в данном случае и в дальнейшем в целях простоты изложения для всех рассматриваемых распределений будем полагать $t_0 \approx 2$), а дисперсия для равномерного распределения равна

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{(x_1 - x_2)}{12}.$$

8.5.8. ПРВ производной стационарного процесса с лапласовским распределением случайной величины ξ (*)

«И ненавидящий подарки будет жить»
([166], 29:21)

Пусть в каждом сечении МНСУП случайная величина ξ распределена по закону Лапласа:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2\beta_1} \exp\left\{-\frac{|\xi - m_{\xi}|}{\beta_1}\right\}. \quad (8.172)$$

Согласно (8.36), из (8.172) получим

$$\rho(\xi) = \varphi(\xi_i) \rho^*(\xi_j), \quad (8.173)$$

где

$$\varphi(\xi_i) = \sqrt{\frac{1}{2\beta_1}} \exp\left\{-\frac{|\xi_i - m_{\xi}|}{2\beta_1}\right\} \quad (8.174)$$

$$\varphi^*(\xi_j) = \sqrt{\frac{1}{2\beta_1}} \exp\left\{-\frac{|\xi_j - m_{\xi}|}{2\beta_1}\right\} \quad (8.175)$$

Подставим (8.174) в (8.37):

$$\varphi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{4\pi h \beta_1}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{|\xi_i - m_{\xi}|}{2\beta_1}\right\} \exp\left\{-i\xi' \xi_i / h\right\} d\xi_i. \quad (8.176)$$

От модуля в подынтегральном выражении можно избавиться следующим образом:

$$\varphi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{4\pi h \beta_1}} \int_{m_{\xi}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{|\xi_i - m_{\xi}|}{2\beta_1}\right\} \exp\left\{-i\xi' \xi_i / h\right\} d\xi_i. \quad (8.177)$$

Интегрируя (8.177), получим

$$\varphi(\xi') = \frac{\sqrt{\beta_1 h} \exp\left\{\frac{m_{\xi}}{2\beta_1} - \frac{m_{\xi}}{h}\right\}}{\sqrt{\pi} (h/2 + i\xi' \beta_1)}. \quad (8.178)$$

Аналогично, подставляя (8.175) в (8.38), получим

$$\varphi^*(\xi') = \frac{2}{\sqrt{4\pi h \beta_1}} \int_{-\infty}^{m_{\xi}} \exp\left\{-\frac{|\xi_j - m_{\xi}|}{2\beta_1} + i\xi' \xi_j\right\} d\xi_j = \frac{\sqrt{\beta_1 h} \exp\left\{-\frac{m_{\xi}}{2\beta_1} + \frac{m_{\xi}}{h}\right\}}{\sqrt{\pi} (h/2 - i\xi' \beta_1)}. \quad (8.179)$$

Здесь применено расширенное комплексное сопряжение, т. е. при данном сопряжении не только меняется знак перед мнимой единицей, но и меняется направление интегрирования на противоположное. Расширенным сопряжением целесообразно пользоваться всякий раз, когда в четном подынтегральном выражении нужно избавиться от операции взятия модуля от переменной интегрирования. Подставляя (8.178) и (8.179) в выражение (8.39), получим

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\pi(h^2/4 + \xi'^2 \beta_1^2)}. \quad (8.180)$$

Дисперсия распределения Лапласа (8.172) равна $\sigma_\xi^2 = 2\beta_1^2$, следовательно, $h = 4\beta_1^2/r_{\text{кор}}$. Поэтому ПРВ (8.180) окончательно примет вид

$$\rho(\xi') = \frac{2k_3}{\pi(k_3^2 + \xi'^2)}, \quad (8.181)$$

где

$$k_3 = \frac{2\beta_1}{r_{\text{кор}}},$$

а это не что иное, как распределение Коши с математическим ожиданием $m_\xi = 0$. Таким образом, для продифференцированного случайного процесса с лапласовским распределением высот неровностей ПРВ величины ξ' в каждом t_i -м сечении процесса $\xi'(t_j)$ определяется распределением Коши.

8.5.9. ПРВ производной стационарного процесса с синусоидальным распределением случайной величины ξ^*

«Бумага не обладает святостью, пока на ней чего-нибудь не напишут» ([166], 28 : 9)

Синусоидальное распределение задается выражением

$$\rho(\xi) = \begin{cases} 2 \sin^2(\pi n_1 \xi / l_2) / l_2, & x \in [0, l_2] \\ 0, & x \notin [0, l_2] \end{cases}, \quad (8.182)$$

где n_1 число горбов распределения на интервале $[0, l_2]$. Согласно (8.36), представим выражение (8.182) в виде

$$\rho(\xi) = \varphi(\xi_i) \varphi^*(\xi_j), \quad (8.183)$$

где

$$\varphi(\xi_i) = \sqrt{2/l_2} \sin(\pi n_1 \xi_i / l_2), \quad (8.184)$$

$$\varphi^*(\xi_j) = \sqrt{2/l_2} \sin(\pi n_1 \xi_j / l_2). \quad (8.185)$$

Подставляя (8.184) в (8.37), получим

$$\varphi(\xi') = (\pi h l_2)^{-1/2} \int_0^{l_2} \sin\left[\frac{\pi n_1}{l_2} \xi_i\right] \exp\left\{-i \xi' \xi_i / h\right\} d\xi_i = -\sqrt{\pi n_1^2 / (l_2^3 h)} \frac{(-1)^{n_1} \exp\left\{-i \xi' l_2 / h\right\} - 1}{\left[\left[\frac{\pi n_1}{l_2}\right]^2 - \left[\frac{\xi'}{h}\right]^2\right]}. \quad (8.186)$$

Аналогично, подставляя (8.185) в (8.38), получим

$$\varphi^*(\xi') = -\sqrt{\pi n_1^2 / (l_2^3 h)} \frac{(-1)^{n_1} \exp\left\{-i \xi' l_2 / h\right\} - 1}{\left[\left[\frac{\pi n_1}{l_2}\right]^2 + \left[\frac{\xi'}{h}\right]^2\right]}. \quad (8.187)$$

Далее, выполняя операцию (8.39) с учетом (8.186) и (8.187), имеем

$$\rho(\xi') = \frac{4\pi n_1^2}{l_2^3 h} \frac{\sin^2 \left[\frac{\xi' l_2}{2h} + \frac{\pi n_1}{2} \right]}{\left[\left[\frac{\pi n_1}{l_2} \right]^2 - \left[\frac{\xi'}{h} \right]^2 \right]^2}. \quad (8.188)$$

Математическое ожидание и дисперсия синусоидального распределения (8.182) равны:

$$m_\xi = \frac{l_2}{2}; \quad \sigma_\xi^2 = \frac{l_2 (\pi^2 n_1^2 - 6)}{12\pi^2 n_1^2}. \quad (8.189)$$

Однако следует учесть, что синусоидальное распределение описывает n_1 -слойную поверхность. Причем каждый слой является статистически неровной поверхностью и рассеяние электромагнитной волны происходит на каждом слое независимо, поэтому в данном случае

$$h = \frac{2\sigma_{\xi_1}^2}{r_{кор1}},$$

где

$$\sigma_{\xi_1}^2 = \frac{l_1^2 (\pi^2 - 6)}{12\pi^2} = 0,033 \cdot l_1^2,$$

$\sigma_{\xi_1}^2$ – дисперсия одного слоя ($n_1 = 1$); $r_{кор1}$ – радиус корреляции одного (n_1 -го) слоя; l_1 – толщина одного слоя. Следовательно,

$$h = \frac{0,066 \cdot l_1^2}{r_{кор1}},$$

или в силу $l_1 = l_2 / n_1$:

$$h = \frac{0,066 \cdot l_2^2}{r_{кор1} \cdot n_1^2}. \quad (8.190)$$

Перепишем выражение (8.188) с учетом (8.190):

$$\rho(\xi') = \frac{4\pi n_1^2 k_4 \sin^2 \left[\frac{\xi' k_4}{2} + \frac{\pi n_1}{2} \right]}{l_2^2 \left((\pi n_1)^2 - (\xi' k_4)^2 \right)}, \quad (8.191)$$

где

$$k_4 = \frac{r_{кор1} \cdot n_1^2}{0,066 \cdot l_2}.$$

8.5.10. Расчет диаграмм рассеяния электромагнитной волны на крупномасштабных статистически неровных поверхностях

Применим предложенный в предыдущих разделах метод расчета диаграмм рассеяния ЭВМ на статистически неровной поверхности. Для этого определим коэффициент рассеяния, заданный выражением (8.127). Согласно этому определению коэффициента рассеяния, рассчитаем сначала $P_k(\nu, \omega | \mathcal{G}, \gamma)$ вероятности того, что луч ЭВМ, рассеянный на различных статистически неровных поверхностях, будет отражен под углами ν и ω

при условии, что направление падающей на поверхность ЭВМ задано углами ϑ и γ . Это позволит определить индикатрисы рассеяния ЭВМ на идеально проводящих неровных поверхностях.

Как было показано в пп. 8.5.1 и 8.5.2, вероятность того, что луч ЭВМ рассеянной на статистически неровной поверхности будет направлен по углам $d\nu$ и $d\omega$ при условии, что направление падающей на поверхность ЭВМ задано углами ϑ и γ , равна

$$P_e(\nu, \omega | \vartheta, \gamma) = \rho(\nu, \omega | \vartheta, \gamma) d\nu d\omega, \quad (8.192)$$

где $\rho(\nu, \omega | \vartheta, \gamma)$ – ПРВ, которая может быть определена по алгоритму (8.143) – (8.151).

В качестве примера рассмотрим процедуру получения ПРВ $\rho(\nu, \omega | \vartheta, \gamma)$ на основании этого алгоритма для гауссовского МНСУП более подробно. Производная в каждом сечении гауссовского процесса, согласно (8.162), распределена по закону:

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1^2}} \exp\left\{-\xi'^2 / 2k_1^2\right\} \quad (8.193)$$

Согласно операции (8.144) перейдем от переменной ξ' к переменной β , с учетом того, что эти переменные связаны однозначным соотношением $\xi' = \operatorname{tg} \beta$ и с учетом якобиана преобразования

$$|\mathfrak{J}_a| = \left| \frac{1}{\cos^2 \beta} \right|$$

из (8.193) получим

$$\rho(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1^2}} \frac{1}{\cos^2 \beta} \exp\left\{-\operatorname{tg}^2 \beta / (2k_1^2)\right\}. \quad (8.194)$$

Далее, согласно (8.145), найдем распределение угла ψ между нормалью \vec{n} к произвольно ориентированному фацету и горизонтальной плоскостью (см. рис. 8.7, 8.8), который связан с углом β соотношением $\beta = \psi - \pi/2$ [см. (8.118)]. Учитывая, что $|\mathfrak{J}_\psi| = 1$, из (8.194) получим

$$\rho(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_1}} \frac{1}{\cos^2\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)} \exp\left\{-\operatorname{tg}^2\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) / (2k_1^2)\right\}. \quad (8.195)$$

Для однородной и изотопной поверхности угол φ , задающий азимутальное направление проекции нормали на горизонтальную плоскость (рис. 8.7), распределен равномерно в интервале $\psi \in [0, 2\pi]$, т. е. нормаль может быть равновероятно ориентирована в любом азимутальном направлении. Поэтому ПРВ $\rho(\varphi, \psi)$ может быть записана в виде

$$\rho(\varphi, \psi) = \rho(\varphi) \rho(\psi) = \frac{1}{2\pi} \rho(\psi). \quad (8.196)$$

Следовательно, согласно (8.195) и (8.196), с учетом (8.146), для однородной и изотопной статистически неровной поверхности с гауссовской статистикой высот неровностей имеем

$$\rho(\psi, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 k_1}} \frac{1}{\sin^2(\psi)} \exp\left\{-\operatorname{ctg}^2(\psi) / 2k_1^2\right\}. \quad (8.197)$$

Теперь, согласно (8.151), для получения искомой ПРВ $\rho(\nu, \omega | \vartheta, \gamma)$ необходимо в (8.197) от переменных ψ и φ перейти к переменным ν и ω , которые связаны между собой соотношениями (8.138) и (8.139). Выполняя данную замену переменных с якобианом преобразования (8.142), окончательно получим

$$\rho(v, \omega | \mathcal{G}, \gamma) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3 k_1^2}} \exp \left\{ \frac{a^2 + b^2}{2c^2 k_1^2} \right\} \left| \frac{c(a'_v b'_\omega - a'_\omega b'_v) + c'_v (ba'_\omega - ab'_\omega)}{c^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \right|, \quad (8.198)$$

где $a, b, c, a'_v, b'_v, c'_v, a'_\omega, b'_\omega$ заданы выражениями (8.135).

Напомним, что в данном разделе « c » означает не скорость света, а задается третьим выражением в (8.135). При выполнении данного преобразования были учтены соотношения (8.152) – (8.154).

Гауссовское распределение высот неровностей пригодно для описания травяного, песчаного, снежного покрытия и слабо взволнованной поверхности моря. Поэтому выражение (8.198) может быть использовано при исследовании индикатрис рассеяния ЭМВ на данном типе подстилающих поверхностей.

Получение ПРВ $\rho(v, \omega | \mathcal{G}, \gamma)$ для поверхностей с последующими статистиками высот неровностей будет рассмотрено менее подробно, поскольку с математической точки зрения продемонстрированные на примере гауссовского процесса операции (8.193) – (8.198) несложны и полностью совпадают для каждого ниже рассмотренного случая.

1. Пусть высоты неровностей подстилающей поверхности распределены по равномерному закону (8.165). Тогда, используя ПРВ (8.171), при выполнении процедуры (8.143) – (8.151), для данного случая получим

$$\rho(v, \omega | \mathcal{G}, \gamma) = \left| \frac{c(a'_v b'_\omega - a'_\omega b'_v) + c'_v (ba'_\omega - ab'_\omega)}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right| \sin^2 \left[-k_2 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2}} \right] / (2\pi^2 k_2). \quad (8.199)$$

Это выражение пригодно для описания индикатрис рассеяния ЭМВ на хорошо проводящих каменистых поверхностях (мокрый гравий, галька и т. д.).

2. Для лапласовского распределения высот неровностей статистически однородной и изотопной поверхности, с учетом (8.172) и (8.180), после выполнения процедуры (8.143) – (8.151), имеем распределение

$$\rho(v, \omega | \mathcal{G}, \gamma) = \frac{k_3}{\pi^2 (k_3^2 c^2 + a^2 + b^2)} \left| \frac{c(a'_v b'_\omega - a'_\omega b'_v) + c'_v (ba'_\omega - ab'_\omega)}{(a^2 + b^2)} \right|. \quad (8.200)$$

Данное распределение подходит для описания рассеяния на поверхностях, подобных листовным покровам деревьев и кустарников.

3. В случае синусоидального распределения высот неровностей подстилающей поверхности (8.182), с учетом (8.191), после выполнения операций (8.143) – (8.151) получим

$$\rho_4(v, \omega | \mathcal{G}, \gamma) = 4\pi_1^2 k_4 \frac{\sin^2 [\pi_1 / 2 - k_4 \sqrt{(a^2 + b^2) / c^2} / 2]}{[(\pi_1)^2 - k_4^2 (a^2 + b^2) / c^2]^2} \times \left| \frac{c(a'_v b'_\omega - a'_\omega b'_v) + c'_v (ba'_\omega - ab'_\omega)}{c^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \right|, \quad (8.201)$$

где

$$k_4 = \frac{r_{\text{кор1}} \cdot n_1^2}{0,066 \cdot l_2}.$$

Данное распределение пригодно для описания процесса рассеяния на подстилающей поверхности, состоящей из n_1 - полупрозрачных неровных слоев.

4. Для однородных и изотропных поверхностей со статистикой, описываемой распределение Коши, выполняя операции (8.143) – (8.151), получим:

$$\rho(v, \omega | \mathcal{G}, \gamma) = \frac{1}{2k_\sigma} \exp \left\{ \frac{1}{k_\sigma} \sqrt{(a^2 + b^2) / c^2} \right\} \left| \frac{c(a'_v b'_\omega - a'_\omega b'_v) + c'_v (ba'_\omega - ab'_\omega)}{c^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \right|, \quad (8.202)$$

где $k_6 = \beta_2 r_{\text{кор}} / (2\sigma_\varepsilon^2)$.

5. В случае, когда неровности подстилающей поверхности распределены по закону $\sin(x)/x$, искомая ПРВ имеет вид

$$\rho(\nu, \omega / \vartheta, \gamma) = \frac{r_{кор}}{4\pi\sigma_{\xi}^2 l_3} \left| \frac{c(a'_\nu b'_\omega - a'_\omega b'_\nu) + c'_\nu (ba'_\omega - ab'_\omega)}{\sqrt{a^2 + b^2} (a^2 + b^2 + c^2)} \right|. \quad (8.203)$$

Верность предлагаемого здесь подхода подтверждается тем, что все выражения (8.199) – (8.203) позволяют получить объемные индикатрисы рассеяния с помощью расчетов на ЭВМ. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными [52].

Интересующихся более детально проблемой рассеяния электромагнитных волн на статистически неровных поверхностях мы отсылаем к диссертации автора [52], которую, по всей видимости, все еще можно найти в Государственной библиотеке имени В. И. Ленина (ныне в Российской государственной библиотеке).