1.2.11. Топологические свойства метрических протяженностей с различными сигнатурами

Данный пункт написан благодаря замечательной монографии Феликса Клейна «Неевклидова геометрия» [14]. В этой монографии Клейн рассмотрел метрические пространства с различными топологиями и указал на связь топологии метрического пространства с сигнатурой его квадратичной формы.

Представим усредненные квадраты интервалов (1.2.50) в виде следующих 16-ти квадратичных форм:

$s^{(++++)2} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$s^{(----)2} = -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$
$s^{(---+)2} = -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$	$s^{(+++-)2} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
$s^{(+--+)2} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$	$s^{(-++-)2} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
$s^{(+---)2} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$s^{(-+++)2} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
$s^{(--+-)2} = -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$s^{(++-+)2} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$
$s^{(-+--)2} = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$s^{(+-++)2} = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
$s^{(+-+-)2} = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$s^{(-+-+)2} = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$
$s^{(++--)2} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$s^{(--++)2} = -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

(1.2.62)

Если эти квадратичные формы приравнять нулю, то получаются следующие три класса 4-мерных метрических протяженностей.

1-й класс: 4-мерные метрические протяженности, сигнатуры которых состоят из четырех одинаковых знаков:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad (++++); \tag{1.2.63}$$

$$-x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \quad (----). \tag{1.2.64}$$

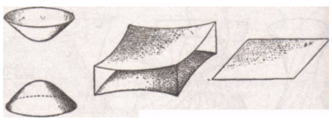
Это так называемые нулевые метрические 4-пространства. У этих «пространств» имеется только одна действительная точка, находящаяся в начале светового конуса. Все остальные точки этих протяженностей являются мнимыми.

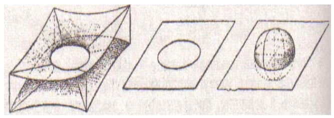
По сути, выражение (1.2.63) описывает не «протяженность», а единственную *точку* (или «белую» точку). В свою очередь выражение (1.2.64) описывает единственную *антиточку* (или «черную» точку).

2-й класс: 4-мерные метрические протяженности, сигнатуры которых состоят из трех одинаковых знаков и одного противоположного:

$$
\begin{aligned}
&-x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (- - - +);\\
&-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (- - + -);\\
&-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (- + - -);\\
&x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (+ - - -);\\
&x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (+ + + -);\\
&x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (+ + - +);\\
&x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (+ - + +);\\
&-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (- + + +).
\end{aligned} \tag{1.2.65}
$$

Это овальные 4-поверхности: а) эллипсоиды; б) эллиптические параболоиды; с) двуполостные гиперболоиды [14]:

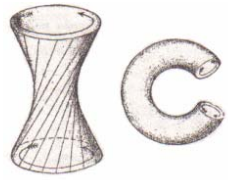




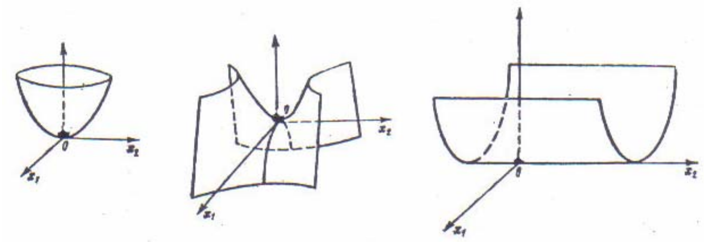
3-й класс: 4-мерные метрические протяженности, сигнатуры которых состоят из двух положительных и двух отрицательных знаков:

$$
\begin{aligned}
&x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (+ - - +);\\
&x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (+ + - -);\\
&x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (+ - + -);\\
&-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (- + + -);\\
&-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (- - + +);\\
&-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \qquad (- + - +).
\end{aligned} \tag{1.2.66}
$$

Выражения (1.2.66) описывают различные варианты кольцеобразных (или тороидальных) 4-поверхностей [14]:



Упрощенная иллюстрация связи сигнатуры 2-мерной протяженности с ее топологией показана на рис. 1.2.23.



а) sign (+ +) $z = x_1^2 + x_2^2$ б) sign (– +) $z = x_2^2 - x_1^2$ в) sign (+ 0) $z = x_1^2$

Рис. 1.2.23. Иллюстрация 2-мерных метрических протяженностей с различными сигнатурами (топологиями) [24]

Из этого рисунка видно, что сигнатура квадратичной формы однозначно связана с топологией описываемой ею 2-мерной протяженности. Но не наоборот. Топология протяженности – значительно более емкое понятие, чем сигнатура.

Посмотрите на поверхность своего тела. Каждый его локальный участок может быть описан двумерной метрической протяженностью с одной из ниже приведенных метрик:

$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2$	$ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2$	$ds^2 = dx_1^2 - dx_2^2$	$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2$
sign (+ +)	sign (– +)	sign (+ –)	sign (– –)
$ds^2 = 0 + dx_2^2$	$ds^2 = dx_2^2 + 0$	$ds^2 = 0 - dx_2^2$	$ds^2 = -dx_1^2 + 0$
sign (0 +)	sign (– 0)	sign (0 –)	sign (– 0)

которые разбиваются на три основных класса: параболические, седловидные и цилиндрические (см. рис. 1.2.23).

Подобно этому каждый локальный участок любой 4-мерной протяженности может быть описан одним или суперпозицией нескольких метрических пространств с сигнатурами (1.2.62).

Если все 16 видов протяженностей с метриками (1.2.62) рассматривать в качестве элементов некоего кода, то выясняется, что на каждом элементе 4-мерного тела записана та или иная кодовая комбинация (слово или фраза), передающая суть и назначение данного участка.

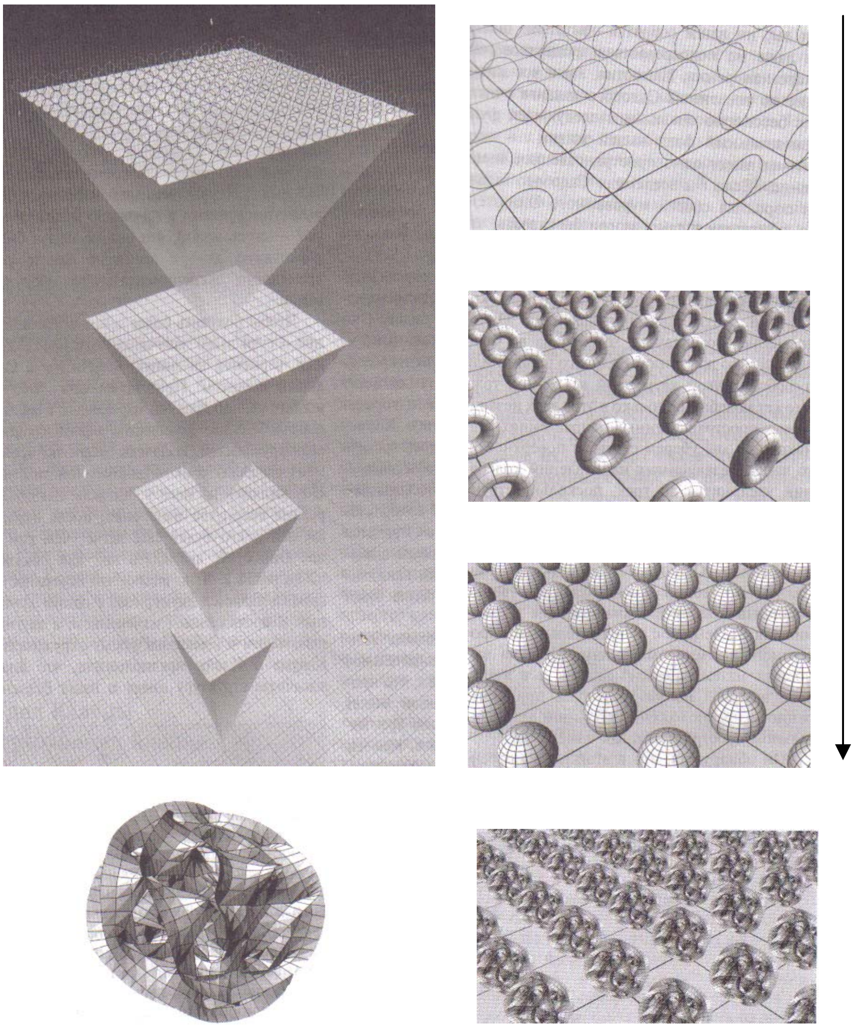
(фото: www.x-top.org)

Суперпозиция метрических пространств с различными сигнатурами (топологиями) приводит практически к тем же результатам, что и сворачивание замкнутых пространств Калаби-Яу в теории струн [12].

Эволюция идей теории струн показана на рис. 1.2.24. От идеи Калуцы-Клейна о существовании в микромире 5-го свернутого в кольцо измерения струнные теоретики перешли к замкнутым двумерным поверхностям бран типа тора или сферы, а затем к многомерным замкнутым пространствам типа частных реализаций пространства Калаби-Яу.

На рис. 1.2.24 а) приведен пример мгновенной реализации замкнутого пространства Калаби-Яу; б) топологические узлы пространств Калаби-Яу свернуты в глубине 4-мерного пространства таким образом, что в среднем при больших масштабах рассмотрения нашему взору является глобальное 4-мерное пространство Минковского [12].

Эволюция идей теории суперструн



а) б)

Рис. 1.2.24. Шестимерное пространство Калаби-Яу [12], по сути, является суперпозицией метрических 4-пространств с различными топологиями