

1.2.8. Метрическая свето-геометрия

Перейдем теперь от аффинных геометрий с различными 4-базисами к метрическим геометриям.

Для примера рассмотрим аффинную систему отсчета $\kappa_7(x_1^{(7)}, x_2^{(7)}, x_3^{(7)}, x_4^{(7)})$ с 4-базисом $\mathbf{e}_i^{(7)}(\mathbf{e}_0^{(7)}, \mathbf{e}_1^{(7)}, \mathbf{e}_2^{(7)}, \mathbf{e}_3^{(7)})$ (см. рис. 1.2.5 или рис. 1.2.19б), со стигнатурой $\{+ + + -\}$ (см. табл. 1.2.1). Зададим в этой системе отсчета 4-вектор

$$d\mathbf{s}^{(7)} = \mathbf{e}_i^{(7)} dx_i^{(7)} = \mathbf{e}_0^{(7)} dx_0^{(7)} + \mathbf{e}_1^{(7)} dx_1^{(7)} + \mathbf{e}_2^{(7)} dx_2^{(7)} + \mathbf{e}_3^{(7)} dx_3^{(7)}, \quad (1.2.35)$$

где $dx_i^{(7)}$ – это i -я проекция 4-вектора $d\mathbf{s}^{(7)}$ на ось $x_i^{(7)}$, направление которой определяется базисным вектором $\mathbf{e}_i^{(7)}$.

Рассмотрим другой 4-вектор

$$d\mathbf{s}^{(5)} = \mathbf{e}_i^{(5)} dx_i^{(5)}, \quad (1.2.36)$$

заданный в аффинной системе отсчета $\kappa_5(x_0^{(5)}, x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)})$ с 4-базисом $\mathbf{e}_i^{(5)}(\mathbf{e}_0^{(5)}, \mathbf{e}_1^{(5)}, \mathbf{e}_2^{(5)}, \mathbf{e}_3^{(5)})$ (см. рис. 1.2.19а), со стигнатурой $\{+ + + +\}$.

Начала систем отсчета κ_5 и κ_7 могут как совпадать с изучаемой точкой O (рис. 1.2.1), так и не совпадать, т. е. находиться в разных углах кубической ячейки (рис. 1.2.2). Для недеформированного состояния исследуемого участка λ_{m+n} -вакуума это не имеет значения.

Найдем теперь скалярное произведение 4-векторов (1.2.35) и (1.2.36)

$$ds^{(5,7)2} = d\mathbf{s}^{(5)} d\mathbf{s}^{(7)} = \mathbf{e}_i^{(5)} \mathbf{e}_j^{(7)} dx_i^{(5)} dx_j^{(7)}. \quad (1.2.37)$$

Оси систем отсчета $x_0^{(5)}, x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)}$ и $x_0^{(7)}, x_1^{(7)}, x_2^{(7)}, x_3^{(7)}$ совпадают друг с другом (рис. 1.2.6) и осями «локального решимого» $ct=x_0, x=x_1, y=x_2, z=x_3$ (см. рис. 1.2.17), т. к. они, по сути, являются соответствующими ребрами одного и того же идеального светового куба (рис. 1.2.19), т. е.

$$x_0^{(5)} = x_0^{(7)} = x_0, \quad x_1^{(5)} = x_1^{(7)} = x_1, \quad x_2^{(5)} = x_2^{(7)} = x_2, \quad x_3^{(5)} = x_3^{(7)} = x_3. \quad (1.2.38)$$

Поэтому выражение (1.2.37) можно представить в виде

$$ds^{(5,7)2} = d\mathbf{s}^{(5)} d\mathbf{s}^{(7)} = \mathbf{e}_i^{(5)} \mathbf{e}_j^{(7)} dx_i dx_j = \quad (1.2.39)$$

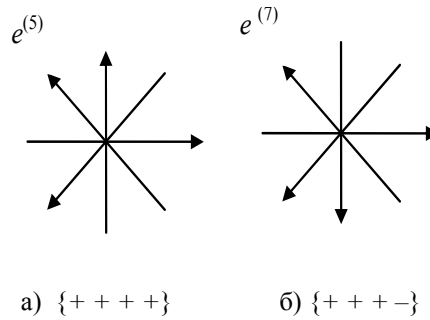


Рис. 1.2.19. Два 4-базиса

$$\begin{aligned}
 &= e_0^{(5)}e_0^{(7)}dx_0dx_0 + e_1^{(5)}e_0^{(7)}dx_1dx_0 + e_2^{(5)}e_0^{(7)}dx_2dx_0 + e_3^{(5)}e_0^{(7)}dx_3dx_0 + \\
 &+ e_0^{(5)}e_1^{(7)}dx_0dx_1 + e_1^{(5)}e_1^{(7)}dx_1dx_1 + e_2^{(5)}e_1^{(7)}dx_2dx_1 + e_3^{(5)}e_1^{(7)}dx_3dx_1 + \\
 &+ e_0^{(5)}e_2^{(7)}dx_0dx_2 + e_1^{(5)}e_2^{(7)}dx_1dx_2 + e_2^{(5)}e_2^{(7)}dx_2dx_2 + e_3^{(5)}e_2^{(7)}dx_3dx_2 + \\
 &+ e_0^{(5)}e_3^{(7)}dx_0dx_3 + e_1^{(5)}e_3^{(7)}dx_1dx_3 + e_2^{(5)}e_3^{(7)}dx_2dx_3 + e_3^{(5)}e_3^{(7)}dx_3dx_3.
 \end{aligned}$$

Для рассматриваемого случая (рис. 1.2.19), скалярные произведения базисных векторов $e_i^{(5)}e_j^{(7)}$ равны:

$$\begin{aligned}
 &\text{при } i = j: e_0^{(5)}e_0^{(7)} = 1, e_1^{(5)}e_1^{(7)} = 1, e_2^{(5)}e_2^{(7)} = 1, e_3^{(5)}e_3^{(7)} = -1, \\
 &\text{при } i \neq j: e_i^{(5)}e_j^{(7)} = 0.
 \end{aligned}$$

Подобные наборы скалярных произведений будем называть «таблицей умножения» базисных векторов.

При этом выражение (1.2.39) приобретает вид квадратичной формы

$$ds^{(5,7)2} = dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2. \quad (1.2.40)$$

Получившаяся квадратичная форма является, по сути, интервалом 4-мерного метрического пространства с сигнатурой (+ + + -).

Напомним, что в специальной и общей теориях относительности (СТО и ОТО) сигнатурой называют упорядоченную совокупность знаков, стоящих перед соответствующими слагаемыми квадратичной формы. Например, в современных книгах по СТО и ОТО наиболее часто рассматривается квадрат интервала

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2, \quad (1.2.41)$$

который является квадратичной формой с сигнатурой (+ - - -).

Чтобы определить сигнатуру метрического пространства с метрикой (1.2.40), вместо выполнения операции скалярного произведения (1.2.39) можно просто перемножить стигнатуры исходных аффинных пространств с 4-базисами, показанными на рис. 1.2.19:

$$\begin{array}{c}
 \{+ + + +\} \\
 \{+ + + -\} \\
 \hline
 (+ + + -)_x
 \end{array} \quad (1.2.42)$$

где умножение знаков производится по следующим правилам. В числителе (1.2.42) перемножаются знаки, находящиеся в одном столбце (вертикальной шеренге), а результат такого перемножения записывается в знаменателе (под чертой) того же столбца. Умножение знаков осуществляется по обычным арифметическим правилам:

$$\{+\} \times \{+\} = \{+\}; \quad \{-\} \times \{+\} = \{-\}; \quad (1.2.43)$$

$$\{+\} \times \{-\} = \{-\}; \quad \{-\} \times \{-\} = \{+\}.$$

Поскольку действия в (1.2.42) выполняются по столбцам (шеренгам), будем называть подобные выражения «ранжирами» (*ранжир* – строй, порядок, шеренга).

Ранжир (1.2.42) является эквивалентной записью скалярного произведения (1.2.40) двух 4-векторов (1.2.35) и (1.2.36).

Операцию типа (1.2.42) будем также называть ранжирным умножением. Знак умножения « \times » в индексе знаменателя данного ранжира, означает произведенную в числителе операцию.

Точно также производится ранжирное деление стигнатур по обычным арифметическим правилам действий со знаками:

$$\{+\} : \{+\} = \{+\}; \quad \{-\} : \{+\} = \{-\}; \quad (1.2.44)$$

$$\{+\} : \{-\} = \{-\}; \quad \{-\} : \{-\} = \{+\}.$$

В этом случае в знаменателе стигнатурного ранжира будем ставить значок «:». Например, запись

$$\frac{\{- + - +\}}{\{+ + + -\}} \quad (1.2.45)$$

(- + - -);

означает ранжирное деление по правилам (1.2.44).

По операциям ранжирного умножения и ранжирного деления полный набор стигнатур (1.2.17):

$$\begin{array}{cccc} \{++++\} & \{+++-\} & \{-++-\} & \{+-+-\} \\ \{----\} & \{-+++ \} & \{----+\} & \{-+--\} \\ \{+---\} & \{+---\} & \{+----\} & \{+---+\} \\ \{----\} & \{-+--\} & \{-+---\} & \{-----\} \end{array} \quad (1.2.46)$$

образуют группу, что свидетельствует о наличии глубинных симметрий в основаниях развиваемой здесь свето-геометрии.

Если подобно тому, как это было проделано в начале данного пункта с векторами $ds^{(5)}$ и $ds^{(7)}$, скалярно перемножить между собой вектора из всех 16-ти аффинных пространств с 4-базисами (рис. 1.2.5), имеющими место в исследуемой точке O , то получим $16 \times 16 = 256$ метрических 4-пространств с метриками вида

$$ds^{(a,b)2} = e_i^{(a)} e_j^{(b)} dx_i^{(a)} dx_j^{(b)}, \quad (1.2.47)$$

где $a, b = 1, \dots, 16$.

Сигнатуры этих $16 \times 16 = 256$ метрических 4-пространств могут быть определены, подобно (1.2.42), ранжирными умножениями соответствующих стигнатур:

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{l} \{+ - + +\} \\ \underline{\{+ + + -\}} \\ (+ - + -)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{+ + + +\} \\ \underline{\{+ - + -\}} \\ (+ - + -)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{- + + +\} \\ \underline{\{+ + + -\}} \\ (- + + -)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{+ + + +\} \\ \underline{\{- + + -\}} \\ (- + + -)_x \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \{+ - - +\} \\ \underline{\{+ + + -\}} \\ (+ - - -)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{+ + - +\} \\ \underline{\{- + + -\}} \\ (- + - -)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{- + + +\} \\ \underline{\{- + + -\}} \\ (+ + + -)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{+ - + -\} \\ \underline{\{+ - + -\}} \\ (+ + + +)_x \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l} \{+ - - -\} \\ \underline{\{+ + + -\}} \\ (+ - - +)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{+ + - +\} \\ \underline{\{- + - -\}} \\ (- + + -)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{- + - +\} \\ \underline{\{- - + -\}} \\ (+ - - -)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{+ - + +\} \\ \underline{\{+ - + -\}} \\ (+ + + -)_x \end{array} \\
 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \\
 \begin{array}{l} \{+ + + -\} \\ \underline{\{- - + -\}} \\ (- - + +)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{- + - -\} \\ \underline{\{+ - + -\}} \\ (- - - +)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{- + + -\} \\ \underline{\{+ - + -\}} \\ (- - + -)_x \end{array} & \begin{array}{l} \{+ - - +\} \\ \underline{\{- + + -\}} \\ (- - - -)_x \end{array}
 \end{array}$$

(1.2.48)

Напомним, что мы все еще продолжаем исследовать окрестности точки O (рис. 1.2.1), которая одновременно принадлежит всем этим 256 метрическим 4-пространствам, т. е. является местом их пересечения.