1.4. Спиновая структура «пустоты»

Зог'ар: *Рав Элиэзер собрался навестить рава Йоси. Присоединился к нему и рав Аба. Вышли в путь. Впереди рав Элиэзер и рав Аба, за ними – погонщик их мулов. Сказал рав Аба: "Откроем Врата ТОРЫ, так как сейчас подходящее время заняться ЕЮ – делать исправления нашего пути".*

В двух предыдущих главах были рассмотрены идеальное и деформированное состояние окрестности «пустой» точки O (рис. 1.2.1). Напомним, что из таких «пустых» точек состоит континуальная протяженность всего $\lambda_{m\div n}$-вакуума.

Кроме шестнадцати стационарных 4-базисов (рис. 1.2.5), берущих начало в изучаемой «пустой» точке O с ней связаны еще и шестнадцать постоянно вращающихся электрических 4-базиса (рис. 1.2.15). То есть, в каждой «пустой» точке $\lambda_{m\div n}$-вакуума имеет место целый мир вращательных движений, изучению которых и посвящена данная глава.

1.4.1. Вращение в псевдоевклидовом пространстве

«Если Нахаш (Змей) крутится –
окрути его, оттого имя твое
Яаков (окручивающий)» *Зог'ар*

Прежде всего, напомним основные сведения из теории 3-мерных вращений [27]. Пусть $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ ортонормированный базис и пусть

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{k}_1 + x_2\mathbf{k}_2 + x_3\mathbf{k}_3 \tag{1.4.1}$$

– вектор, заданный в аффинном пространстве с данным ортонормированным базисом.

Если вектор (1.4.1) повернуть на определенный угол при сохранении его длины, то его проекции на оси аффинного пространства изменятся:

$$\mathbf{x}' = x_1'\mathbf{k}_1 + x_2'\mathbf{k}_2 + x_3'\mathbf{k}_3 \tag{1.4.2}$$

Проекции векторов (1.4.1) и (1.4.2) связаны системой уравнений

$$\begin{aligned} x_1' &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ x_2' &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ x_1' &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

или в матричной форме

$$\mathbf{x}' = B\mathbf{x}\ , \qquad (1.4.4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}. \qquad (1.4.5)$$

Если детерминант матрицы (1.4.5) равен единице

$$\det(B) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = 1\ , \qquad (1.4.6)$$

то величина вектора $\mathbf{x}$ при преобразовании (1.4.3) не изменяется, а само это преобразование называется собственным вращением.

Всевозможные собственные вращения вектора (1.4.1) образуют специальную ортогональную группу $SO\,(3)$.

Напомним, что подразумевается под специальной ортогональной группой $SO\,(n)$ в n-мерном пространстве. По определению n-мерной ортогональной группой $O(n)= B(n)$ называют совокупность всех линейных преобразований в n-мерном линейном пространстве, оставляющих инвариантной сумму квадратов компонент (т. е. длину) всякого вектора $x= (x_a)$, где $a=1,2,\ldots, n$

$$x^2 = x_a x_a = x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2\ . \qquad (1.4.7)$$

Пусть $B = (B_{\alpha\beta})$ – квадратная матрица рассматриваемого линейного преобразования, тогда [81]

$$x_\alpha = B_{\alpha\beta}\, x_\beta \qquad \text{или} \qquad x = Bx = xB^{\mathrm{T}},$$

где B^{T} – транспонированная матрица.

Условие ортогональности преобразования B можно теперь записать в виде

$$x'^2 = (B\,x)^2 = (B\,x)\,B\,x = \ x\,B^{\mathrm{T}}B\,x = x^2 = x1x. \qquad (1.4.8)$$

Поскольку данное равенство является тождеством относительно вектора **x**, *то из (1.4.8) следует*

$$B^{\mathrm{T}}B = \mathbf{1}_n\,, \qquad (1.4.9)$$

где

$$\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

– единичная матрица надлежащего n-го порядка.

Из (1.4.9) следует

$$B^{\mathrm{T}} = B^{-1} \quad \text{и} \quad BB^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}_n . \tag{1.4.10}$$

С помощью индексов соотношения (1.4.8) записываются в виде

$$B_{\alpha\beta}{}^{\mathrm{T}} B_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma} . \tag{1.4.11}$$

Взяв детерминант от обеих частей (1.4.11), получим

$$|B|^2 = 1 \quad \textit{или} \quad |B| = \pm 1 . \tag{1.4.12}$$

Поэтому при любом числе измерений ортогональные преобразования подразделяются на собственные

$$B_+ = |B_+| = 1 \tag{1.4.13}$$

и несобственные

$$B_- = |B_-| = -1. \tag{1.4.14}$$

Из них только собственные ортогональные преобразования B_+ образуют группу, которая обозначается SO (n) и называется специальной ортогональной группой в n-мерном пространстве. Слово «специальная» означает условие равенства единице детерминанта матрицы преобразования. Очевидно, что группа собственных преобразований является подгруппой группы всех ортогональных преобразований.