1.4.10. Свойства аффиноров. Фотоны и антифотоны

Для определенности рассмотрим квадратичную форму

$$s^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x_0{}^2 - x_1{}^2 - x_2{}^2 - x_3{}^2 = 0, \qquad (1.4.74)$$

с сигнатурой (+ – – –), описывающей распространение луча света в прямом направлении.

Представим данную квадратичную форму в виде аффинора в сферической системе координат:

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}_{\det} = ct^2 - r^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta) = 0,$$

или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = ct\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + r\left\{\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}, \qquad (1.4.75)$$

Выражение в фигурных скобках сводится к хорошо известной в квантовой механике спиновой (фазовой) матрице

$$\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \qquad (1.4.76)$$

Собственные значения μ спиновой матрицы (1.4.76) определяются характеристическим уравнением [24]

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \mu & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0. \qquad (1.4.77)$$

Откуда

$$\mu_1 = 1, \qquad \mu_2 = -1. \qquad (1.4.78)$$

Эти собственные значения соответствуют спину 1 или – 1 луча света, распространяющегося от точечного источника в любом радиальном направлении метрического пространства с сигнатурой (+ – – –). Откуда заключаем, что поляризация в данном случае от углов наклона луча света не зависит.

Рассмотрим теперь в качестве другого примера 4-протяженность с кольцеобразной (тороидальной) топологией с метрикой и поляризационной матрицей (см. табл. 1.4.3):

$$s^2 = {x_0}^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 + {x_3}^2, \quad sign(+--+) \;\to\; \begin{pmatrix} -i\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & i\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Запишем характеристическое уравнение для данного случая

$$\begin{vmatrix} -i\cos\theta - \mu & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & i\cos\theta - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0\,, \qquad (1.4.79)$$

откуда

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\cos 2\theta}\,. \qquad (1.4.80)$$

Это означает, что в общем случае эллиптическая поляризация (т. е. искаженный спин) луча света в таком 4-пространстве зависит от угла его распространения из точечного источника.

Используя поляризационные матрицы, сведенные в табл. 1.4.3, точно так же можно получить значение спина лучей, распространяющихся из точечного источника в 4-пространствах с соответствующей сигнатурой (топологией).