1.4.2. Спиновые матрицы

В ряде задач, связанных с вращением, более эффективным оказалось представление векторов в спиновом базисе. Чтобы получить данное представление, рассмотрим комплексную эрмитову 2×2-матрицу (спинтензор) A_3, детерминант которой равен отрицательному значению длины вектора (1.4.1) [27]

$$\det(A_3) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}_{\det} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{vmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \qquad (1.4.15)$$

Данную 2×2-матрицу можно представить в развернутом виде:

$$A_3 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (1.4.16)$$

Действительно, выполняя операции умножения и сложения матриц в правой части выражения (1.4.16), убеждаемся в его справедливости.

Матрицы, входящие в правую часть выражения (1.4.16), являются спиновыми матрицами Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (1.4.17)$$

Запись

$$x_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3, \qquad (1.4.18)$$

можно рассматривать как представление вектора (1.4.1) в спиновом базисе.

Согласно основной теореме теории спиноров [26], между выражениями (1.4.1) и (1.4.18) имеет место однозначное соответствие (изоморфизм) с сохранением операций сложения, умножения векторов и умножения вектора на число.

Каждому повороту вектора (1.4.1)

$$\mathbf{x}' = B\mathbf{x} = x_1'\mathbf{k}_1 + x_2'\mathbf{k}_2 + x_3'\mathbf{k}_3 \qquad (1.4.19)$$

ставится в соответствие матрица

$$A_3 = x_1'\sigma_1 + x_2'\sigma_2 + x_3'\sigma_3 = UA_3U^*, \qquad (1.4.20)$$

где U – комплексная унитарная матрица с определителем, равным 1 (т. е. унимодулярная матрица):

$$U = \begin{pmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{pmatrix}; \qquad U^* = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}. \tag{1.4.21}$$

Здесь

$$\left.\begin{array}{l} a = \rho + i\nu, \quad b = \mu + i\lambda \\ \overline{a} = \rho - i\nu, \quad \overline{b} = \mu - i\lambda \\ |a|^2 + |b|^2 = \rho^2 + \nu^2 + \mu^2 + \lambda^2 \end{array}\right\}. \tag{1.4.22}$$

Комплексные числа a, b определяют соответствующее вращение однозначно, но a, b и $-a, -b$ описывают одно и то же вращение. Числа $a, b, \overline{a}, -\overline{b}$ или $\overline{a}, i\overline{b}, a, -ib$ называются параметрами Кэли-Клейна данного вращения.

Любая комплексная 2×2-матрица может быть представлена в виде линейной комбинации спиновых матриц (1.4.17), в частности [25]:

$$\begin{array}{l} U = \rho I - i(\lambda\sigma_1 + \mu\sigma_2 + \nu\sigma_3)\,; \\ U^* = \rho I + i(\lambda\sigma_1 + \mu\sigma_2 + \nu\sigma_3)\,. \end{array} \tag{1.4.23}$$

Матрицы U и $-U$ однозначно определяют одно и то же вращение.