

### 1.4.3. Спинорное представление метрики Пространства Минковского

Рассмотрим спиновую структуру локального участка пространства Минковского, описываемого квадратом интервала

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2, \quad (1.4.24)$$

с сигнатурой (+---).

Как известно [25], квадратичная форма (1.4.24) является детерминантом эрмитовой  $2 \times 2$ -матрицы (спинтензора)

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}_{\det} = \begin{vmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad \text{sign}(+---). \quad (1.4.25)$$

В том, что данная  $2 \times 2$ -матрица является эрмитовой, легко убедиться прямым вычислением

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}, \quad (1.4.26)$$

индекс (+) означает транспонирование и комплексное сопряжение.

В теории спиноров матрицы вида (1.4.26) называют смешанными спинтензорами второго ранга [35].

*Матрица (1.4.25) соответствует бинарно-перекрестной (узловой) записи Непроизносимого Имени ТВОРЦА НВНИ (см. (0.29) в [18])*

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I & H \\ H' & V \end{pmatrix}. \quad (1.4.27)$$

*Еще раз подчеркнем: «все, что делает Алсигна связано с постижением Проявлений Имен ТВОРЦА в нижних мирах!». Исследование структуры плотной «пустоты» – это чтение бесконечной Книги Творения, написанной различными конфигурациями, перестановками, сочетаниями и раскрытиями четырех букв ЕГО Великого Непроизносимого Имени НВНИ.*

Представим  $2 \times 2$ -матрицу (1.4.27) в развернутом виде

$$A_4 = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.4.28)$$

где

$$\sigma_0^{(+---)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(+---)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.4.29)$$

– набор спиновых матриц Паули, которые используются для описания свойств спиноров.

В теории спиноров вектора вида (1.4.1) называют агрегатами в действительном  $n$ -мерном пространстве [26], а соответствующие им в спинорном представлении  $A_n$ -матрицы вида (1.4.16) или (1.4.28) называют аффинорами.

В теории спиноров [26] выражение (1.4.28) ставится в однозначное соответствие кватерниону

$$q = x_0 + x_1 \mathcal{E}_1 + x_2 \mathcal{E}_2 + x_3 \mathcal{E}_3, \quad (1.4.30)$$

где

$$\mathcal{E}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{E}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathcal{E}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отображение  $q \rightarrow A_4$  является гомоморфизмом.

В данной главе введены в рассмотрение спинтензоры и аффиноры. Это сделано вовсе не для того, чтобы окутать Алсигну математической пеленой. Просто математический аппарат теории спиноров имеет ряд ощутимых преимуществ перед векторным анализом при рассмотрении процессов связанных с поворотами и вращениями.

Для примера рассмотрим матричную конструкцию с участием  $2 \times 2$ -матрицы (спинтензора) (1.4.28), присущую всем видам спиноров

$$\begin{aligned} & \left( s_1^*, s_2^* \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right) = \\ & = x_0 \left( s_1^*, s_2^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right) - x_1 \left( s_1^*, s_2^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right) - x_2 \left( s_1^*, s_2^* \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right) - x_3 \left( s_1^*, s_2^* \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right) = \\ & = (s_1^* s_1 + s_2^* s_2) x_0 - (-s_2^* s_1 - s_2^* s_1) x_1 - (is_2^* s_1 - is_1^* s_2) x_2 - (-s_1^* s_1 + s_2^* s_2) x_3, \end{aligned} \quad (1.4.31)$$

где

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_1^* \\ s_2^* \end{pmatrix}$$

– матрица-столбец и эрмитовосопряженная ей матрица-строка, описывающие состояние спинора, т. е. объекта, обладающего двумя взаимоисключающими, но равновероятными состояниями вращения – спина.

Продемонстрируем, как конструкция (1.4.31) применяется, например, для описания круговой поляризации лучей света.

В п. 1.2.3 было показано, что луч света состоит из суперпозиции двух встречных волновых возмущений вакуума (луча и антилуча), см. выражение (1.2.3):

$$\begin{aligned} \underline{\rho} \\ \underline{E}_x = \frac{1}{2} (\underline{E}_x^{(+)} + \underline{E}_x^{(-)}) = \frac{1}{2} \left\{ \underline{E}_{zm}^{(+)} e^{i(\varpi t - k_x x + \varphi_{xz}^{(+)})} + \underline{E}_{zm}^{(-)} e^{-i(\varpi t - k_x x + \varphi_{xz}^{(-)})} \right\} + \\ + \frac{1}{2} i \left\{ \underline{E}_{ym}^{(+)} e^{i(\varpi t - k_x x + \varphi_{xy}^{(+)})} - \underline{E}_{ym}^{(-)} e^{-i(\varpi t - k_x x + \varphi_{xy}^{(-)})} \right\}. \end{aligned}$$

В этом выражении искусственно (эвристически) уже учтены свойства круговой поляризации (вращения) векторов электрического поля в плоскости перпендикулярной направлению распространения рассматриваемых лучей (волн). Тот же результат можно формально получить, используя спинорное представление.

Пусть прямая волна описывается выражением

$$\underline{\rho} \\ \underline{E}^{(+)} = \bar{a}_+ e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} (ct-r)}, \quad (1.4.32)$$

а обратная ей волна

$$\underline{\rho} \\ \underline{E}^{(-)} = \bar{a}_- e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (ct-r)}, \quad (1.4.33)$$

где  $a_+$  и  $a_-$  – амплитуды прямой и обратной волны. В общем случае это комплексные числа:

$$\bar{a}_+ = a_+ e^{i\varphi_+}, \quad \bar{a}_- = a_- e^{-i\varphi_-}, \quad \bar{a}_+^* = a_+ e^{-i\varphi_+}, \quad \bar{a}_-^* = a_- e^{i\varphi_-},$$

содержащие также информацию о фазах  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  этих волн.

В спинорном представлении взаимно противоположное единство сопряженных волн (1.4.32) и (1.4.33) можно представить в виде двухкомпонентного спинора:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix}, \quad (1.4.34)$$

и эрмитовосопряженного ему спинора

$$(s_1^*, s_2^*) = |\psi\rangle^+ = \langle\psi| = \left( \bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \quad \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \right). \quad (1.4.35)$$

Условие нормировки в данном случае выражается равенством

$$(s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \langle\psi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} & \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = |\bar{a}_+|^2 + |\bar{a}_-|^2. \quad (1.4.36)$$

Теперь воспользуемся выражением (1.4.31) для нахождения проекций спина (т. е. круговой поляризации) луча света на оси координат. Полагая в выражении (1.4.31)  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ , рассмотрим только сумму его пространственных слагаемых

$$\begin{aligned} & (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\ & = (s_2^* s_1 + s_2^* s_1) + (-is_2^* s_1 + is_1^* s_2) + (s_1^* s_1 - s_2^* s_2). \end{aligned}$$

Подставляя в это выражение спиноры (1.4.34) и (1.4.35), получим три следующие усредненные проекции спина на соответствующие координатные оси  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$ :

$$\begin{aligned}
 \langle s_x \rangle &= \langle \psi | -\sigma_1 | \psi \rangle = (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, & \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = \bar{a}_-^* \bar{a}_+ e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} + \bar{a}_+^* \bar{a}_- e^{i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)};
 \end{aligned} \tag{1.4.37}$$

$$\begin{aligned}
 \langle s_y \rangle &= \langle \psi | -\sigma_2 | \psi \rangle = (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, & \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = \\
 &= \bar{a}_-^* \bar{a}_+ e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} + \bar{a}_+^* \bar{a}_- e^{i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} = i \left[ \bar{a}_+^* \bar{a}_- e^{i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} - \bar{a}_-^* \bar{a}_+ e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} \right];
 \end{aligned} \tag{1.4.38}$$

$$\begin{aligned}
 \langle s_z \rangle &= \langle \psi | -\sigma_3 | \psi \rangle = (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, & \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = |\bar{a}_+|^2 - |\bar{a}_-|^2.
 \end{aligned} \tag{1.4.39}$$

Начальные фазы рассматриваемой сопряженной пары колебаний учитывается комплексностью амплитуд  $a_+$  и  $a_-$ . Поэтому, не ограничивая общности, можно положить  $\varphi_+ = \varphi_- = 0$ , т. е. считать  $a_+$  и  $a_-$  вещественными числами. В этом случае формулы (1.4.37) – (1.4.39) приобретают следующий упрощенный вид:

$$\langle s_x \rangle = 2a_+ a_- \cos \left[ \frac{4\pi}{\lambda} (ct - r) \right] = 2a_+ a_- \cos [2(t\omega - kr)],$$

$$\langle s_y \rangle = 2a_+ a_- \sin \left[ \frac{4\pi}{\lambda} (ct - r) \right] = 2a_+ a_- \sin [2(\omega t - kr)], \quad (1.4.40)$$

$$\langle s_z \rangle = |a_+|^2 - |a_-|^2.$$

В случае равенства амплитуд прямой и обратной волн

$$a_+ = a_- \quad (1.4.41)$$

вместо уравнений (1.4.40) получим следующие усредненные проекции спина

$$\langle s_z \rangle = 0,$$

$$\langle s_x \rangle = 2a_+^2 \cos [2(\omega t - kr)], \quad (1.4.42)$$

$$\langle s_y \rangle = 2a_+^2 \sin [2(\omega t - kr)].$$

Откуда видно, что у усредненного луча света, распространяющегося по метрической протяженности пространства Минковского с метрикой (1.4.24) и сигнатурой (+ -- --), проекция спина (т. е. вращения усредненного вектора напряженности электрического поля) на направление распространения луча света  $Z$  неизменна и равна нулю. При этом его проекция на плоскость  $XY$ , перпендикулярную направлению распространения данного луча, вращается вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью  $\omega = 4\pi c/\lambda$ .

Спинорное представление распространения сопряженной пары волн по метрической протяженности с сигнатурой (+ -- --) приводит к поляризационным представлениям классической электродинамики, но значительно более красивым и естественным путем, без привлечения дополнительных гипотез.

Спинорное представление квадратичной формы (1.4.24) оказалось более фундаментальным, поскольку автоматически содержит в себе и информацию о круговой поляризации сопряженных волновых возмущений, распространяющихся в соответствующем метрическом пространстве.

В этом случае поляризация света и ее свойства являются не привнесенными параметрами, как это имеет место в классической электродинамике, а органичным свойством исследуемой метрической грани  $\lambda_{m=n}$ -вакуума.

В качестве второго примера приведем описание собственного вращения (спина) элементарной частицы (в частности электрона)[29].

Как упоминалось выше, у лучей света (т. е. у сопряженных волновых возмущений вакуума) круговая поляризация (т. е. спин – вращение) вектора электрической напряженности  $\mathbf{E}^{(+)}$  однозначно определяется направлением их распространения. Если вектор  $\mathbf{E}^{(+)}$  прямого луча света (см. п. 1.2.3) вращается в плоскости, перпендикулярной направлению его распространения по часовой стрелке, то вектор  $\mathbf{E}^{(-)}$  обратного луча света непрерывно вращается против часовой стрелки. Направление вращения (спина) суммарного вектора  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)}$  определяется разностью фаз соответственно прямого и обратного лучей.

Собственное вращение (спин) локальных частицеподобных вакуумных образований (например, ядер электронов) принципиально отличается от вращения вектора электрического поля лучей света.

Ядро покоящегося локального вакуумного образования может вращаться вокруг любого наперед заданного направления оси  $Z$  как по часовой стрелке, так и против часовой стрелки. То есть ядро электрона с вероятностью  $\frac{1}{2}$  может вращаться вокруг оси  $Z$  как по часовой стрелке, так и с вероятностью  $\frac{1}{2}$  против часовой стрелки.

Для формального описания данного «странного» обстоятельства вводятся два ортогональных спинора. Один спинор связан с вероятностью  $\frac{1}{2}$  вращения ядра электрона по часовой стрелке вокруг произвольно выбранной оси  $Z$ :

$$|Z +\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \langle Z +| = \sqrt{\frac{1}{2}} (1 \ 0), \quad (1.4.42a)$$

а второй ортогональный ему спинор связан с вероятностью  $\frac{1}{2}$  его вращения против часовой стрелки вокруг той же оси  $Z$

$$|Z -\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \langle Z -| = \sqrt{\frac{1}{2}} (0 \ 1). \quad (1.4.42б)$$

В рамках квантовой механики говорят не о вероятности направления вращения ядра элементарной частицы вокруг произвольной, наперед заданной оси  $Z$ , а о проекциях ее собственного момента импульса на эту ось. В этом случае спиноры (1.4.42a) и (1.4.42б) приобретают вид [29]

$$|Z +\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\Delta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \langle Z +| = \sqrt{\frac{1}{2}\Delta} (1, 0), \quad (1.4.42в)$$

$$|Z -\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}\Delta} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \langle Z -| = \sqrt{\frac{1}{2}\Delta} (0, 1), \quad (1.4.42г)$$

где  $\Delta$  – константа с размерностью момента импульса.

Подставим эти спиноры в выражение (1.4.31). При этом в первом случае (1.4.42в) имеем

$$\begin{aligned} \langle s^+ \rangle &= (s_1^*, s_2^*) \sigma_x \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*) \sigma_y \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*) \sigma_z \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \Delta (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \Delta (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \Delta (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4.42д)$$

Вычисляя слагаемые данного выражения, получим [29].

$$\langle s_x^+ \rangle = \frac{1}{2} \Delta (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \langle s_y^+ \rangle = \frac{1}{2} \Delta (1, 0) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \langle s_z^+ \rangle = \frac{1}{2} \Delta (1, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Delta. \quad (1.4.42е)$$

Во втором случае (1.4.42г) имеем

$$\begin{aligned} \langle s^- \rangle &= (s_1^*, s_2^*) \sigma_x \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*) \sigma_y \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*) \sigma_z \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \Delta (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \Delta (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \Delta (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4.42ж)$$

При этом получается

$$\langle s_x^- \rangle = \frac{1}{2} \Delta (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \langle s_y^- \rangle = \frac{1}{2} \Delta (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \langle s_z^- \rangle = \frac{1}{2} \Delta (0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \Delta. \quad (1.4.42з)$$

Любое направление в 3-мерном пространстве можно задать единичным вектором  $\mathbf{n}$  со следующими проекциями на декартовы оси координат [29]:

$$\begin{aligned} n_x &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_x = \sin \theta \cos \varphi, \\ n_y &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_y = \sin \theta \sin \varphi, \\ n_z &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_z = \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.4.42и)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  – полярный и аксиальный углы сферической системы координат. Для произвольного направления получим



$$\begin{aligned}\sigma &= n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z = \\ &= \sin \theta \cos \varphi \sigma_x + \sin \theta \sin \varphi \sigma_y + \cos \theta \sigma_z = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4.42к)$$

Для данного произвольного направления ортогональная пара спиноров так же изменяется, и они могут быть выражены через исходные спиноры (1.4.42в) с помощью следующего преобразования [29]

$$|n+\rangle = \alpha_1 |Z+\rangle + \beta_1 |Z-\rangle; \quad (1.4.42л)$$

$$|n-\rangle = \alpha_2 |Z+\rangle + \beta_2 |Z-\rangle,$$

где  $\alpha_i, \beta_i$  – коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки:

$$|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2 = 1.$$

Данное условие выполняется, если

$$\alpha_1 = \cos(\theta/2) e^{-i\varphi/2}, \quad \beta_1 = \sin(\theta/2) e^{i\varphi/2},$$

$$\alpha_2 = -\sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2}, \quad \beta_2 = \cos(\theta/2) e^{i\varphi/2}.$$

При этом спиноры (1.4.42л) приобретают вид

$$|n+\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} \Delta} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}; \quad (1.4.42м)$$

$$|n-\rangle = \sqrt{\frac{1}{2} \Delta} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) e^{-i\varphi/2} \\ \cos(\theta/2) e^{i\varphi/2} \end{pmatrix},$$

а проекции спина на оси координат в первом случае равны [29]:

$$\langle n+ | \sigma_x | n+ \rangle = \frac{1}{2} \Delta \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) (e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2}) = \frac{1}{2} \Delta \sin \theta \cos \varphi;$$

$$\langle n+ | \sigma_y | n+ \rangle = \frac{1}{2} \Delta \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) (-ie^{i\varphi/2} + ie^{-i\varphi/2}) = \frac{1}{2} \Delta \sin \theta \sin \varphi;$$

$$\langle n+ | \sigma_z | n+ \rangle = \frac{1}{2} \Delta [\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)] = \frac{1}{2} \Delta \cos \theta.$$

Из продемонстрированных примеров видно, что вакуумные волновые возмущения с целым спином (бозоны) и локальные вакуумные образования с полуцелым спином (фермионы) имеют различные механизмы собственного вращения. Но корневая основа их вращательного поведения едина и связана со спиновой структурой самого 4-пространства Минковского, выраженной через спинорное представление его метрики (1.4.25).

*Если за основу взять метрику с любой другой сигнатурой (топологией) (1.2.62) и изоморфным ей аффинором (см. табл. 1.4.1), и проделать с ними процедуры, приведенные в этом пункте, то увидим, что одни и те же спиноры ведут себя в разных метрических пространствах по-разному.*

*Но в полноте учета всех 16-ти возможных типов метрических пространств спинорные свойства вновь сведутся к вакуумному условию, т. е. вернуться к полной взаимной компенсации всевозможных вращательных проявлений.*

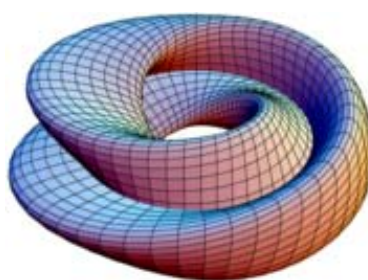


Рис. 1.4.1. Замкнутая 2-мерная протяженность, свернутая по принципу ленты Мебиуса, <http://ru.wikipedia.org>