1.4.9. Переход в сферическую систему координат

В будущем ВСЕВЫШНИЙ Покажет всем истинную величину «йецер а-ра» (злого начала). Праведники увидят его величиной с гору и удивятся: «Как мы могли справиться с этой громадой?». И будут плакать от удивления. А негодяи увидят «йецер а-ра» с игольчатое ушко и будут плакать: «Как мы не могли победить это ничтожество?». Зог'ар говорит: «И те и другие будут плакать» [4].

Выберем для примера 4-мерную протяженность с метрикой

$$s^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

и вернемся к рассмотрению одного из вариантов ее спинорного представления:

$$\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \qquad sign(++++),$$

где (1.4.69)

$$\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} = x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь в сферическую систему координат

$$x_0 = ct, \quad x_1 = r\sin\theta\cos\varphi; \quad x_2 = r\sin\theta\sin\varphi; \quad x_3 = r\cos\theta. \qquad (1.4.70)$$

При этом выражения (1.4.69) принимают вид

$$\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = ct^2 + r^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta) = 0$$

с сигнатурой $(++++)$, или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} = ct\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + r\left\{\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\}.$$

Слагаемые в фигурных скобках сводятся к поляризационной матрице:

$$\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}+\sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}i\cos\theta & \sin\theta(i\cos\varphi+\sin\varphi)\\ \sin\theta(i\cos\varphi-\sin\varphi) & -i\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i(\varphi+\pi/2)}\\ \sin\theta\, e^{i(\varphi+\pi/2)} & -i\cos\theta\end{pmatrix}. \tag{1.4.71}$$

Проделаем аналогичные преобразования со всеми 15-ю оставшимися метрическими протяженностями с различными сигнатурами.

В качестве еще одного примера проделаем те же процедуры со спинорным представлением 4-мерной протяженности с метрикой

$$s^2=x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2$$

и сигнатурой (+ + + –).

Запишем данную метрику в спинорном представлении с учетом перехода в сферическую систему координат

$$\begin{pmatrix}x_0+x_3 & ix_1+x_2\\ ix_1-x_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}_{\det}=x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=ct^2+r^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi-\cos^2\theta)=0,$$

$$\begin{pmatrix}x_0+x_3 & ix_1+x_2\\ ix_1-x_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}=ct\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+r\left\{\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}+\sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}-\cos\theta\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}. \tag{1.4.72}$$

В результате получим следующую поляризационную матрицу:

$$\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}+\sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\cos\theta\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta(i\cos\varphi+\sin\varphi)\\ \sin\theta(i\cos\varphi-\sin\varphi) & -\cos\theta\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{i(\varphi+\pi/2)}\\ \sin\theta e^{i(\varphi+\pi/2)} & -\cos\theta\end{pmatrix}. \tag{1.4.73}$$

Проделывая подобные операции со всеми оставшимися метриками (1.4.43), получим следующие поляризационные матрицы, соответствующие метрическим протяженностям с различными сигнатурами.

Таблица 1.4.3

${x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 \quad sign(++++) \;\to\; \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i(\varphi+\pi/2)} \\ \sin\theta\, e^{i(\varphi+\pi/2)} & -i\cos\theta \end{pmatrix};$
${x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2-{x_3}^2 \quad sign(+++-) \;\to\; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{i(\varphi+\pi/2)} \\ \sin\theta\, e^{i(\varphi+\pi/2)} & -\cos\theta \end{pmatrix};$
$-{x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2-{x_3}^2 \quad sign(-++-) \;\to\; \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta\, e^{i(\varphi+\pi/2)} \\ \sin\theta\, e^{i(\varphi+\pi/2)} & i\cos\theta \end{pmatrix};$
${x_0}^2+{x_1}^2-{x_2}^2+{x_3}^2 \quad sign(++-+) \;\to\; \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi) \\ \sin\theta(-\cos\varphi+\sin\varphi) & i\cos\theta \end{pmatrix};$
$-{x_0}^2-{x_1}^2-{x_2}^2+{x_3}^2 \quad sign(---+) \to \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i(\varphi+\pi/2)} \\ \sin\theta\, e^{-i(\varphi+\pi/2)} & i\cos\theta \end{pmatrix};$
$-{x_0}^2+{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 \quad sign(-+++) \;\to\; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i(\varphi+\pi/2)} \\ \sin\theta\, e^{-i(\varphi+\pi/2)} & \cos\theta \end{pmatrix};$
$-{x_0}^2-{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2 \quad sign(--++) \;\to\; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi-\sin\varphi) & \cos\theta \end{pmatrix};$
$-{x_0}^2+{x_1}^2-{x_2}^2+{x_3}^2 \quad sign(-+-+) \;\to\; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(-\cos\varphi+\sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi+\sin\varphi) & \cos\theta \end{pmatrix};$

$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad sign(++--) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \sin\theta(-\cos\varphi + \sin\varphi) & \cos\theta \end{pmatrix};$
$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \quad sign(+--+) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} -i\cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & i\cos\theta \end{pmatrix};$
$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad sign(+---) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{-i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix};$
$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad sign(+-++) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi - \sin\varphi) & -i\cos\theta \end{pmatrix};$
$-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \quad sign(--+-) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi - \sin\varphi) & i\cos\theta \end{pmatrix};$
$x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \quad sign(+-+-) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \sin\theta(\cos\varphi - \sin\varphi) & \cos\theta \end{pmatrix};$
$-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad sign(-+--) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta(\cos\varphi + \sin\varphi) \\ \sin\theta(-\cos\varphi + \sin\varphi) & i\cos\theta \end{pmatrix};$
$-x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad sign(----) \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} i\cos\theta & \sin\theta\, e^{i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{-i\varphi} & i\cos\theta \end{pmatrix}.$

Каждому аффинору соответствует свая поляризационная матрица (табл. 1.4.3), определяющая характер вращения в соответствующем аффинном пространстве.