1.5. Двухмерные повороты и вращения

Воскликните Б-ГУ, вся земля. Пойте Славу Имени ЕГО; воздайте Славу Хвалу ЕМУ. Скажите Б-ГУ: как Страшен ТЫ в Делах ТВОИХ! По множеству Силы ТВОЕЙ, покорятся ТЕБЕ, враги ТВОИ. Вся земля да поклонится ТЕБЕ, да поет Имени ТВОЕМУ (Тег'елим, Псалтирь, 65:1-4).

Имя Творящей ОСНОВЫ Бытия в линейной форме:

$$\text{י-ה-ו-ה}_{(\text{коц})} \equiv H'VHIi$$

или в форме свернутой в кольцо:

$$(\text{коц}) = \begin{matrix} \text{י} & \text{ה} \\ \text{ה} & \text{ו} \end{matrix} \equiv \begin{pmatrix} I & H \\ H & V \end{pmatrix} = i$$

лежит у Истоков всего сотворенного Мироздания (см. [18]), в том числе и в основаниях исходной «Пустоты».

В этой главе Алсигна пытается показать, как Имя ТВОРЦА многократно фрактально проявляется во вращательных свойствах протяженности окружающей нас Реальности.

1.5.1. Вращение аффинных плоскостей

Возьмем для примера аффинное 4-пространство *cT,X,Y,Z (H'VHI)* со стигнатурой {+ + + +} (рис. 1.5.1), и рассмотрим повороты его 2-мерных плоскостей (пространств) *cTX, cTY, cTZ, XY, XZ, YZ.*

В данном и последующем разделах для краткости вместо обозначения *cT* будем использовать обозначение *T* и рассматривать плоскости *TX, TY, TZ, XY, XZ, YZ* .

Поворот плоских 2-мерных поверхностей описывается специальной ортогональной группой преобразований (поворотов) *SO*(2) (см. п. 1.4.1).

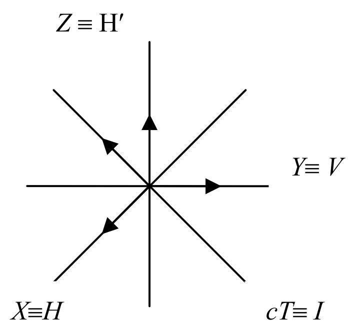

Рис. 1.5.1. Аффинное 4-мерное пространство со стигнатурой {+ + + +}

Вначале рассмотрим различные варианты поворотов плоскости *TX*.

Для того, чтобы ортогональная группа преобразований $O(2)$ оставляла инвариантной величину вектора $x = (x_a)$, где $a = 0{,}1$

$$x^2 = x_0{}^2 + x_1{}^2 \qquad (1.5.1)$$

в плоскости *TX,* необходимо чтобы вместо условия (1.4.9) выполнялось условие

$$O^{+}O = \mathbf{1}_2\,, \qquad (1.5.2)$$

где

$$1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

крест означает эрмитовое сопряжение (т. е. транспонирование и комплексное сопряжение).

Матрицы

$$O = \begin{pmatrix} \underline{q}_{00} & \underline{q}_{10} \\ \underline{q}_{01} & \underline{q}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & H \\ H & V \end{pmatrix} = i\,, \qquad (1.5.3)$$

удовлетворяющие условию (1.5.2) называются унитарными. Свойства унитарной матрицы могут быть представлены в развернутом виде [8]

$$\begin{array}{ccccccccc} I & & H & & V & & H & & i \\ \left|\underline{q}_{00}\right|^2 + \left|\underline{q}_{01}\right|^2 & = & \left|\underline{q}_{10}\right|^2 + \left|\underline{q}_{11}\right|^2 & = & \left|\underline{q}_{00}\right|^2 + \left|\underline{q}_{10}\right|^2 & = & \left|\underline{q}_{01}\right|^2 + \left|\underline{q}_{11}\right|^2 & = & 1; \end{array}$$

$$\underline{q}_{00}\underline{q}_{10}^{*} + \underline{q}_{01}\underline{q}_{11}^{*} = \underline{q}_{10}\underline{q}_{00}^{*} + \underline{q}_{11}\underline{q}_{01}^{*} = \underline{q}_{00}\underline{q}_{01}^{*} + \underline{q}_{10}\underline{q}_{11}^{*} = \underline{q}_{01}\underline{q}_{00}^{*} + \underline{q}_{11}\underline{q}_{10}^{*} = 0. \qquad (1.5.4)$$

Условиям (1.5.4) удовлетворяют следующие компоненты [8]

$$\underline{q}_{00} = e^{i\zeta}\cos\chi, \quad \underline{q}_{01} = -e^{i\psi}\sin\chi, \quad \underline{q}_{10} = -e^{-i\psi_1}\sin\chi_1, \quad \underline{q}_{11} = e^{-i\zeta_1}\cos\chi_1.$$

где $\zeta, \zeta_1, \psi, \psi_1, \chi, \chi_1$ – некоторые действительные числа.

С помощью линейного преобразования:

$$\chi = \chi_1 = \alpha; \quad \zeta = \eta_0 + \varphi_0; \quad \zeta_1 = \eta_0 - \varphi_0; \quad \psi = \eta_0 + \varphi_0 + 2\delta - \pi; \quad \psi_1 = \eta_0 - \varphi_0 + 2\delta,$$

искомая унитарная матрица (1.5.3) принимает вид [8]

$$\underline{O} = e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{i\eta_0}\cos\alpha & e^{i(\eta_0+2\delta)}\sin\alpha \\ -e^{-i(\eta_0+2\delta)}\sin\alpha & e^{-i\eta_0}\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & H \\ H' & V \end{pmatrix}, \qquad (1.5.5)$$

где η_0 – начальная фаза поворота оси T;
φ_0 – начальная фаза поворота оси X;
$2\delta = \eta_0 - \varphi_0$ – разность начальных фаз поворотов осей T и X.

Для описания постоянного вращения осей аффинного 2-мерного пространства TX, в выражение (1.5.5) необходимо включить еще один осцилляционный множитель

$$\underline{O} = e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{i\eta_0}\cos\alpha & e^{i(\eta_0+2\delta)}\sin\alpha \\ -e^{-i(\eta_0+2\delta)}\sin\alpha & e^{-i\eta_0}\cos\alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t + k_x x)}. \qquad (1.5.6)$$

В дальнейшем третий множитель в (1.5.6) часто будет опускаться, т. к. он не всегда несет информационную нагрузку.

Унитарная матрица (1.5.5) наиболее полно описывает всевозможные повороты рассматриваемой плоскости *TX,* при этом каждый конкретный случай определяется четырьмя параметрами α, η_0, φ_0, δ ($H'VHI$).

Матрицу (1.5.5) можно представить в следующем виде [8]

$$\underline{O} = e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & e^{i2\delta}\sin\alpha \\ -e^{-i2\delta}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad (1.5.7)$$

где

$$\underline{O}(\varphi_0, \eta_0) = e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_0} \end{pmatrix} \qquad (1.5.8)$$

– фазовая матрица;

$$\underline{O}(\alpha, \delta) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & e^{i2\delta}\sin\alpha \\ -e^{-i2\delta}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad (1.5.9)$$

– угловая матрица.

С учетом формул Эйлера матрица (1.5.5) принимает вид

$$\underline{O}(\varphi_0, \eta_0, \alpha, \delta) = e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \{\cos 2\delta + i\sin 2\delta\}\sin\alpha \\ -\{\cos 2\delta - i\sin 2\delta\}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (1.5.11)$$

В общем случае имеет место четыре основных вида поворотов плоскости TX

$$\underline{O_1}(\varphi_0,\eta_0,\alpha,\delta)=e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \{\cos 2\delta + i\sin 2\delta\}\sin\alpha \\ -\{\cos 2\delta - i\sin 2\delta\}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad I$$

$$\underline{O_2}(\varphi_0,\eta_0,\alpha,\delta)=e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{-i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{i\eta_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\{\cos 2\delta - i\sin 2\delta\}\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \{\cos 2\delta + i\sin 2\delta\}\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad H$$

$$\underline{O_3}(\varphi_0,\eta_0,\alpha,\delta)=e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \{\cos 2\delta + i\sin 2\delta\}\sin(-\alpha) \\ -\{\cos 2\delta - i\sin 2\delta\}\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \qquad V$$

$$\underline{O_4}(\varphi_0,\eta_0,\alpha,\delta)=e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{-i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{i\eta_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\{\cos 2\delta - i\sin 2\delta\}\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \\ \cos(-\alpha) & \{\cos 2\delta + i\sin 2\delta\}\sin(-\alpha) \end{pmatrix} \qquad H'$$

(1.5.12)

Комплексно сопряженные им унитарные матрицы имеют вид:

$$\underline{O_1^*}(\varphi_0,\eta_0,\alpha,\delta)=e^{-i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{-i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{i\eta_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \{\cos 2\delta - i\sin 2\delta\}\sin\alpha \\ -\{\cos 2\delta + i\sin 2\delta\}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad H$$

$$\underline{O_2^*}(\varphi_0,\eta_0,\alpha,\delta)=e^{-i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\{\cos 2\delta + i\sin 2\delta\}\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \{\cos 2\delta - i\sin 2\delta\}\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad V$$

$$\underline{O_3^*}(\varphi_0,\eta_0,\alpha,\delta)=e^{-i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{-i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{i\eta_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & \{\cos 2\delta - i\sin 2\delta\}\sin(-\alpha) \\ -\{\cos 2\delta + i\sin 2\delta\}\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \qquad H$$

$$\underline{O_4^*}(\varphi_0,\eta_0,\alpha,\delta)=e^{-i\varphi_0}\begin{pmatrix} e^{i\eta_0} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\{\cos 2\delta + i\sin 2\delta\}\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \\ \cos(-\alpha) & \{\cos 2\delta - i\sin 2\delta\}\sin(-\alpha) \end{pmatrix} \qquad I$$

(1.5.13)

Для примера приведем преобразование координат в случае поворотов плоскости TX, описываемое унитарной матрицей (1.5.5)

$$\begin{pmatrix} ct & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha & e^{i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha \\ -e^{-i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha & e^{-i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' & x' \end{pmatrix}, \qquad (1.5.14)$$

где

$$ct' = ct\, e^{i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha \;-\; x\, e^{-i(\eta_0+\varphi_0+2\delta)}\sin\alpha;$$

$$x' = ct\, e^{i(\eta_0+\varphi_0+2\delta)}\sin\alpha \;+\; x\, e^{-i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha.$$

Откуда видно, что $\eta_0 + \varphi_0$ – это начальная фаза поворота плоскости *TX,* а $2\delta= ½(\eta_0 - \varphi_0)$ половина отставания фазы φ_0 от фазы η_0. С учетом третьего множителя в (1.5.6) имеем четыре случая:

$$\begin{pmatrix} ct & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha & e^{i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha \\ -e^{-i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha & e^{-i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha \end{pmatrix} e^{i(\omega t-k_x x)} = \begin{pmatrix} ct' & x' \end{pmatrix} \qquad I$$

$$\begin{pmatrix} ct & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha & e^{i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha \\ -e^{-i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha & e^{-i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha \end{pmatrix} e^{-i(\omega t-k_x x)} = \begin{pmatrix} ct' & x' \end{pmatrix} \qquad H$$

$$\begin{pmatrix} ct & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha & e^{i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha \\ -e^{-i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha & e^{-i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha \end{pmatrix} e^{i(k_x x-\omega t)} = \begin{pmatrix} ct' & x' \end{pmatrix} \qquad V$$

$$\begin{pmatrix} ct & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha & e^{i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha \\ -e^{-i(\eta_0+2\delta+\varphi_0)}\sin\alpha & e^{-i(\eta_0+\varphi_0)}\cos\alpha \end{pmatrix} e^{-i(k_x x-\omega t)} = \begin{pmatrix} ct' & x' \end{pmatrix} \qquad H'$$

(1.5.15)

где, например, для (1.5.15 *I*) постоянное вращение осей описывается выражениями

$$ct' = ct\, e^{i(\eta_0+\varphi_0)} e^{i(\omega t+k_x x)}\cos\alpha \;-\; x\, e^{-i(\eta_0+\varphi_0+2\delta)} e^{i(\omega t+k_x x)}\sin\alpha;$$

(1.5.16)

$$x' = ct\, e^{i(\eta_0+\varphi_0+2\delta)} e^{i(\omega t+k_x x)}\sin\alpha \;+\; x\, e^{-i(\eta_0+\varphi_0)} e^{i(\omega t+k_x x)}\cos\alpha.$$