1.5.2. Матрицы Паули – Кэли 2

Получим некоторые матрицы Паули – Кэли (1.4.59), подставляя в (1.5.12) соответствующие параметры α, η_0, φ_0, δ ($H'VHI$).

Для (1.5.12 I,H) имеем

$$\underline{O_1}(\varphi_0 = \eta_0 = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \delta = \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad I$$

$$\underline{O_1}(\varphi_0 = \eta_0 = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \delta = 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H$$

$$I$$

$$\underline{O_1}(\varphi_0 = \eta_0 = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \delta = -\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad V$$

$$\underline{O_1}(\varphi_0 = \eta_0 = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \delta = \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad H'$$

и

$$\underline{O_2}(\varphi_0 = \eta_0 = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \delta = \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad H$$

$$\underline{O_2}(\varphi_0 = \eta_0 = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \delta = 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I$$

$$H$$

$$\underline{O_2}(\varphi_0 = \eta_0 = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \delta = -\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad V$$

$$\underline{O_2}(\varphi_0 = \eta_0 = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\ \delta = \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad H'$$

(1.5.17)

Для (1.5.12 VH') имеем

$$\underline{O_3}(\varphi_0=\eta_0=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \delta=\frac{\pi}{4})=\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}\qquad H$$

$$\underline{O_3}(\varphi_0=\eta_0=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \delta=0)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad V$$

$$V$$

$$\underline{O_3}(\varphi_0=\eta_0=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \delta=-\frac{\pi}{4})=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}\qquad I$$

$$\underline{O_3}(\varphi_0=\eta_0=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \delta=\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\qquad H'$$

и

$$\underline{O_4}(\varphi_0=\eta_0=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \delta=\frac{\pi}{4})=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\qquad H$$

$$\underline{O_4}(\varphi_0=\eta_0=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \delta=0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad I$$

$$H'$$

$$\underline{O_4}(\varphi_0=\eta_0=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \delta=-\frac{\pi}{4})=\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\qquad H'$$

$$\underline{O_4}(\varphi_0=\eta_0=0,\ \alpha=\frac{\pi}{2},\ \delta=\frac{\pi}{2})=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad V$$

(1.5.18)

Из шестнадцати полученных диагональных 2×2-матриц (1.5.17) и (1.5.18), только 8 отличаются друг от друга, т. к. каждая из них встречается дважды.

Найдем еще 8 недостающих до 16 обобщенных матриц Паули-Кэли (1.4.59). Для этого напомним, что в силу произвольности начальных фаз η_0 и φ_0 следующая матрица допускает факторизацию [8]:

$$\underline{O}(\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ -\sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & i\sin\alpha\\ i\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta+i\sin\beta\sin\alpha & \cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\\ -\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-i\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}, \tag{1.5.19}$$

где α – угол эллиптичности;

β – угол наклона большой оси поляризационного эллипса.

При этом преобразование координат принимает вид:

$$\begin{pmatrix}ct & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta+i\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta\\ -\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta-i\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ct' & x'\end{pmatrix}, \tag{1.5.20}$$

где

$$\begin{aligned} ct' &= ct(\cos\alpha\cos\beta+i\sin\beta\sin\alpha)-\ x(\cos\alpha\sin\beta-i\sin\alpha\cos\beta);\\ x' &= ct(\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta)\ +\ x(\cos\alpha\cos\beta-i\sin\alpha\sin\beta).\end{aligned} \tag{1.5.21}$$

Основные виды поляризации (т. е. типы вращения) 2-мерной аффинной системы координат x_0, x_1 (или ct, x) представлены на рис. 1.5.2.

Под поляризацией двухмерной системы координат подразумевается закон изменения направления вектора, задающего направление одной из осей рассматриваемой системы x_0, x_1.

Приведем несколько примеров, подставляя в (1.5.19) конкретные углы α и β для частных случаев получим:

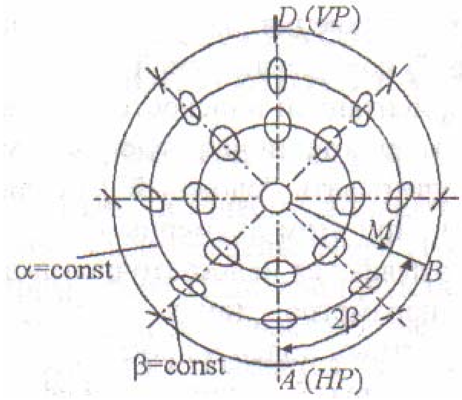

Рис. 1.5.2.
Различные виды поляризации (вращения) 2-мерной плоскости в зависимости от углов α и β [8]:
VP – вертикальная поляризация;
HP – горизонтальная поляризация

$$\underline{O}(\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right];$$

$$\underline{O}(\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = -\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right];$$

$$\underline{O}(\alpha = -\frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right];$$

$$\underline{O}(\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right];$$

$$\underline{O}(\alpha = -\frac{\pi}{2}, \beta = -\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} i & -i \\ -i & -i \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right].$$

(1.5.22)

Откуда видим, что восемь, недостающих до шестнадцати, обобщенных матриц Паули-Кэли проявляются в виде аддитивно связанных пар.

Круги на полях [34]