1.6. Дираковский $\lambda_{m\div n}$-вакуум

1.6.1. Задача Дирака

Релятивистское выражение для полной энергии частицы с массой покоя m_0, как известно, имеет вид

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}\ , \tag{1.6.1}$$

где $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$ – импульс частицы.

Откуда для частиц с положительными массами получается следующая квадратичная форма

$$E^2/c^2 = p_0{}^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2, \tag{1.6.2}$$

где $p_0 = m_0 c$.

Пользуясь стандартной процедурой квантовой механики, заменим классические величины на операторы

$$E \to \hat{E} = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to \hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla \tag{1.6.3}$$

и подставим эти операторы в выражение (1.6.2). В результате получается уравнение Клена-Гордона

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-c^2\hbar^2\nabla^2 + m_0^2 c^4\right)\psi\,. \tag{1.6.4}$$

Это уравнение допускает решения, приводящие к отрицательным плотностям распределения вероятностей, поэтому в течение ряда лет оно не получало признания в качестве уравнения, пригодного для описания поведения частиц. Как позже выяснилось, сложности возникли из-за того, что исходное выражение (1.6.2) является уравнением второго порядка. Чтобы преодолеть это затруднение, Поль Анри Морис Дирак (1902 – 1984) предпринял попытку линеаризовать квадратичную форму (1.6.2).

Вместо (1.6.2) Дирак формально записал

$$\frac{E}{c} = \sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu p_\mu = \gamma_0 p_0 + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3 \tag{1.6.5}$$

и потребовал, чтобы величины γ_μ были такими, чтобы выполнялось следующее условие [29]:

$$E^2 = c^2 \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3} \gamma_\mu \gamma_{\mu'} p_\mu p_{\mu'} = \frac{c^2}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3}(\gamma_\mu\gamma_{\mu'} + \gamma_{\mu'}\gamma_\mu) p_\mu p_{\mu'} =$$

$$= c^2(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2). \tag{1.6.6}$$

После напряженного поиска Дирак обнаружил, что данное условие выполняется, если величины γ_μ являются, например, следующими четырехрядными матрицами [29]

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6.7}$$

Замена в линейной форме (1.6.5) классических величин на операторы (1.6.3) приводит к знаменитому линейному уравнению Дирака

$$\left(i\eta\gamma_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + i\eta\gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i\eta\gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i\eta\gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} - mc \right)\psi = 0\,, \tag{1.6.8}$$

при этом волновая функция ψ по необходимости приобрела вид четырехкомпонентного спинора

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \qquad \textit{или} \qquad \psi^+ = \begin{pmatrix} \psi_0^* & \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* \end{pmatrix}, \tag{1.6.9}$$

где знак «+» – означает эрмитовое сопряжение (т. е. транспонирование и комплексное сопряжение).

Уравнение Дирака (1.6.8) легло в основу релятивистки инвариантной квантовой механики.