1.6.2. Линеаризация квадратичных форм

В физике встречаются несколько вариантов квадратичных форм. К ним относятся, например:

1) уже упомянутое выше релятивистское уравнение для полной энергии частицы

$$E^2/c^2 = p_0{}^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2\ ;$$

2) квадрат интервала

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\ ;$$

3) волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi_k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi_k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi_k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi_k}{\partial z^2} = 0\ ;$$

4) уравнения комплексифицированного эйконала [20]

$$(\partial_t S)^2 - (\partial_x S)^2 - (\partial_y S)^2 - (\partial_z S)^2 = 0$$

и т. д.

Все эти квадратичные формы связаны со свойствами окружающей нас плотной «пустоты» и имеют одинаковую внутреннюю структуру.

Рассмотрим свойства квадратичной формы на примере квадрата интервала

$$ds^2 = c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (1.6.10)$$

с сигнатурой (+ + + +).

Используя подход Дирака, «расслоим» выражение (1.6.10) на два сомножителя

$$dsds' = (\gamma_0 cdt + \gamma_1 dx + \gamma_2 dy + \gamma_3 dz)\cdot(\gamma_0 cdt + \gamma_1 dx + \gamma_2 dy + \gamma_3 dz)\,. \qquad (1.6.11)$$

Раскрывая в данном выражении скобки, получим

$$dsds' = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\gamma_{\mu'}dx^\mu dx^{\mu'} = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3}(\gamma_\mu\gamma_{\mu'} + \gamma_{\mu'}\gamma_\mu)dx^\mu dx^{\mu'}\,. \qquad (1.6.12)$$

Очевидно, что выражение (1.6.12) приобретает вид исходной квадратичной формы (1.6.10) при условии

$$\gamma_\mu\gamma_{\mu'} + \gamma_{\mu'}\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\mu'}, \tag{1.6.13}$$

где $\delta_{\mu\mu'}$ – символы Кронекера

$$\delta_{\mu\mu'} = \begin{cases} 1 \text{ } при \quad \mu = \mu', \\ 0 \text{ } при \quad \mu \neq \mu'. \end{cases} \tag{1.6.14}$$

Существует, по крайней мере, два варианта поиска величин γ_μ, удовлетворяющих условию (1.6.13): 1) метод Дирака, и 2) метод клиффордовых агрегатов (например, кватернионов).

Метод Дирака предполагает вместо символов Кронекера (1.6.14) использовать диагональную единичную матрицу

$$\delta_{\mu\mu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.6.15}$$

При этом условию (1.6.13) удовлетворяет, например, следующий набор 4×4-матриц:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6.16}$$

Эти матрицы можно рассматривать в качестве образующих соответствующей алгебры Клиффорда [26].

В этом случае выражение (1.6.12) приобретает матричный вид

$$\left(ds_{ii}^2\right) = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\gamma_\eta dx^\mu dx^\eta = \frac{1}{2}\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3}(\gamma_\mu\gamma_\eta + \gamma_\eta\gamma_\mu)dx^\mu dx^\eta , \tag{1.6.17}$$

где

$$\left(ds_{ii}^2\right) = \begin{pmatrix} ds_{00}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ds_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ds_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ds_{33}^2 \end{pmatrix}. \tag{1.6.18}$$

Выражение (1.6.17) с учетом (1.6.15) может быть представлено в виде

$$\left(ds_{ii}^2\right)=\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\gamma_\eta dx^\mu dx^\eta = c^2dt^2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+dx^2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+ \tag{1.6.19}$$

$$+dy^2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+dz^2\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$