

1.8.6.3. Мнимые объекты ζ_r . Октавы

Вначале напомним основные сведения об октавах. Октавой (или октонионом) называют число, состоящее из восьми слагаемых [36]:

$$u = u_0 + iu_1 + ju_2 + ku_3 + Eu_4 + Iu_5 + Ju_6 + Ku_7, \quad (1.8.42)$$

где u_f – действительные числа
($f = 0, 1, 2, \dots, 7$);

$$i, j, k, E, I, J, K \text{ – мнимые числа, удовлетворяющие условию} \\ i^2 = j^2 = k^2 = E^2 = I^2 = J^2 = K^2 = -1 \quad (1.8.43)$$

и подчиняющиеся одной из множества вариантов таблиц умножения:

Таблица 1.8.2

\times	1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>E</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>
1	1	<i>i</i>	<i>J</i>	<i>k</i>	<i>E</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	-1	<i>k</i>	- <i>j</i>	<i>I</i>	- <i>E</i>	- <i>K</i>	<i>J</i>
<i>j</i>	<i>j</i>	- <i>k</i>	-1	<i>i</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	- <i>E</i>	- <i>I</i>
<i>k</i>	<i>k</i>	<i>j</i>	- <i>i</i>	-1	<i>K</i>	- <i>J</i>	<i>I</i>	- <i>E</i>
<i>E</i>	<i>E</i>	- <i>I</i>	- <i>J</i>	- <i>K</i>	-1	<i>i</i>	<i>i</i>	<i>k</i>
<i>I</i>	<i>I</i>	<i>E</i>	- <i>K</i>	<i>J</i>	- <i>i</i>	-1	- <i>k</i>	<i>j</i>
<i>J</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	<i>E</i>	- <i>I</i>	- <i>j</i>	<i>k</i>	-1	- <i>i</i>
<i>K</i>	<i>K</i>	- <i>J</i>	<i>I</i>	<i>E</i>	- <i>k</i>	- <i>J</i>	<i>i</i>	-1

Произведение двух октав

$$u = u_0 + iu_1 + ju_2 + ku_3 + Eu_4 + Iu_5 + Ju_6 + Ku_7 \quad (1.8.44)$$

и

$$v = v_0 + iv_1 + jv_2 + kv_3 + Ev_4 + Iv_5 + Jv_6 + Kv_7 \quad (1.8.45)$$

с учетом правил умножения, представленных в табл. 1.8.2, имеет вид [36]:

$$uv = (u_0v_0 - u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3 - u_4v_4 - u_5v_5 - u_6v_6 - u_7v_7) + \\ + (u_0v_1 + u_1v_0 + u_2v_3 - u_3v_2 + u_4v_5 - u_5v_4 - u_6v_7 + u_7v_6) i + \\ + (u_2v_0 + u_0v_2 - u_1v_3 + u_3v_1 + u_4v_6 + u_5v_7 - u_6v_4 - u_7v_5) j + \\ + (u_0v_3 + u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_0 + u_4v_7 - u_5v_6 + u_6v_5 - u_7v_4) k + \\ + (u_0v_4 - u_1v_5 - u_2v_6 - u_3v_7 + u_4v_0 + u_5v_1 + u_6v_2 + u_7v_3) E + \\ + (u_1v_4 + u_0v_5 + u_3v_6 - u_2v_7 - u_4v_1 + u_5v_0 - u_6v_3 + u_7v_2) I + \\ + (u_2v_4 - u_3v_5 + u_0v_6 + u_1v_7 - u_4v_2 + u_5v_3 + u_6v_0 - u_7v_1) J + \\ + (u_3v_4 + u_2v_5 - u_1v_6 + u_0v_7 - u_4v_3 - u_5v_2 + u_6v_1 + u_7v_0) K. \quad (1.8.46)$$



«Гиперкомплексность» [19]

Произведение октав является не коммутативной операцией:

$$uv \neq vu. \quad (1.8.47)$$

Сопряженной октаве (1.8.44) является октава

$$u^* = u_0 - iu_1 - ju_2 - ku_3 - Eu_4 - Iu_5 - Ju_6 - Ku_7, \quad (1.8.48)$$

а произведение октавы с сопряженной ей октавой, согласно (1.8.46), приводит к квадратичной форме

$$uu^* = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2. \quad (1.8.49)$$

Очевидно, что данное свойство октав идеально подходит для «расслоения» квадратичных форм (1.8.28) и (1.8.29) соответственно на два линейных (аффинных) сомножителя:

$$ds_{\Sigma}^{(+2)} = ds_{\Sigma}^{(+)} ds_{\Sigma}^{(+)}'', \quad (1.8.50)$$

$$ds_{\Sigma}^{(-2)} = ds_{\Sigma}^{(-)} ds_{\Sigma}^{(-)}''. \quad (1.8.51)$$

Пусть сомножитель $ds_{\Sigma}^{(+)}$ в правой части выражения (1.8.50) является октавой

$$ds_{\Sigma}^{(+)} = ds_{\Sigma}^{(+)} = ds^{(++++)} + ids^{(++++)} + jds^{(---+)} + kds^{(---+)} + \\ + Eds^{(---+)} + Ids^{(+-+-)} + Jds^{(+-+-)} + Kds^{(+-+-)}, \quad (1.8.52)$$

а второй сомножитель – сопряженной ей октавой

$$ds_{\Sigma}^{(+)}'' = ds_{\Sigma}^{(+)*} = ds^{(++++)} - ids^{(++++)} - jds^{(---+)} - kds^{(---+)} - \\ - Eds^{(---+)} - Ids^{(+-+-)} - Jds^{(+-+-)} - Kds^{(+-+-)}. \quad (1.8.53)$$

Тогда, подобно (1.8.49), произведение октав (1.8.52) и (1.8.53) оказывается исходной суммарной квадратичной формой (1.8.28).

Аналогично, квадратичная форма (1.8.29) «расслаивается» на два гиперкомплексных сомножителя: октаву

$$ds_{\Sigma}^{(-)} = ds_{\Sigma}^{(-)} = ds^{(----)} + ids^{(----)} + jds^{(----)} + kds^{(----)} + \\ + Eds^{(----)} + Ids^{(----)} + Jds^{(----)} + Kds^{(----)} \quad (1.8.54)$$

и сопряженную ей октаву

$$\begin{aligned}
 ds_{\Sigma}^{(-)''} = ds_{\Sigma}^{(-)*} = ds^{(+---)} - ids^{(----)} - jds^{(+++-)} - kds^{(-++-)} \\
 - E ds^{(++-+)} - I ds^{(--++)} - J ds^{(+--+)} - K ds^{(-+-+)}, \quad (1.8.55)
 \end{aligned}$$

произведение которых оказывается второй исходной суммарной квадратичной формой (1.8.29).

В этом случае объектами ζ_r (где $r = 1, 2, 3, \dots, 8$) являются мнимые единицы $1, i, j, k, E, I, J, K$, подчиняющиеся правилам умножения, сведенным, например, в табл. 1.8.2.