1.9.4. Метрическая 4-протяженность с постоянным искривлением [31]

В том пункте рассмотрим свойства обобщенной квадратичной формы

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j\,, \qquad (1.9.32)$$

для случая метрической протяженности с постоянным искривлением.

Представьте себе горный ручей, в котором тонкие струи воды сложно переплетаются друг с другом, но в каждой локальной области общая картина и средняя скорость течения потока воды со временем не изменяются. Такое поведение воды можно описать стационарным полем скоростей ее течения. Под стационарностью подразумевается независимость среднего поведения воды от времени.

В случае стационарной искривленной метрической протяженности в каждой ее локальной области компоненты метрического тензора со временем не изменяются $g_{ij} = const$.

Представим стационарную метрику (1.9.32) в следующем виде [31]:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}\, dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00}(dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\, dx^\alpha)^2 - dl^2, \quad (1.9.33)$$

где

$$dl^2 = -\,(g_{\alpha\beta} - \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}})\, dx^\alpha dx^\beta \qquad (1.9.34)$$

– квадрат элемента 3-мерной длины в 4-искривленной протяженности.

В данном случае *собственное время*, равно [см. (1.7.118)]

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c}\left(dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha \right). \qquad (1.9.35)$$

Теперь в каждой локальной области исследуемой метрической протяженности можно ввести 3-мерную локальную скорость [31]

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{cdl}{\sqrt{g_{00}}\left(dx^0 + \frac{g_{\alpha\beta}}{g_{00}} dx^\alpha \right)}. \qquad (1.9.36)$$

Ковариантные компоненты скорости v_α как 3-мерного вектора в мире со стационарной метрикой (1.9.32) и, соответственно, квадрат этого вектора надо понимать как

$$v_\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta, \qquad v^2 = v_\alpha v^\alpha. \tag{1.9.38}$$

С учетом (1.9.36) стационарную метрику (1.9.33) можно представить в виде

$$ds^2 = g_{00}(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2(1- v^2/c^2), \tag{1.9.39}$$

где введен 3-мерный вектор

$$g_\alpha = -\frac{g_{\alpha\beta}}{g_{00}}. \tag{1.9.40}$$

Компоненты 4-скорости $u^i=dx^i/ds$, с учетом (1.9.39) равны [31]:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1.9.41}$$

Найдем теперь символы Кристоффеля (1.8.10). Для рассматриваемого случая имеем [31]:

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = ½\, g_{00}{}^{;\alpha} \tag{1.9.42}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{0\beta} = ½\, g_{00}\,(g^\alpha{}_{;\beta} - g^{;\alpha}{}_\beta) - ½\, g_\beta\, g_{00}{}^{;\alpha} \tag{1.9.43}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha{}_{\beta\gamma} + ½\, g_{00}[c_\beta(g^{;\alpha}{}_\gamma - g^\alpha{}_{;\gamma}) + g_\gamma(g^{;\alpha}{}_\beta - g^\alpha{}_{;\beta})] + ½\, g_\beta\, g_\gamma\, g_{00}{}^{;\alpha}, \tag{1.9.44}$$

где, например $g^\alpha{}_{;\gamma}$ – означает ковариантную производную, которая в данном случае совпадает с обычной частной производной [31]

$$g^\alpha_{;\gamma} = \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^\gamma} + \Gamma^\alpha_{k\gamma} g^\alpha = \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^\gamma}\ . \tag{1.9.45}$$

В этих выражениях все тензорные действия (ковариантные дифференцирования, подъем и опускание индексов) производятся в 3-мерном пространстве с метрикой $g_{\alpha\beta}$ над 3-мерным вектором g^α и скаляром g_{00}. $\lambda^\alpha{}_{\beta\gamma}$ – есть 3-мерный символ Кристоффеля, составленный из компонент тензора $g_{\alpha\beta}$ так, как $\Gamma^i{}_{kl}$ составляется из компонент g_{ik}.

Подставив выражения (1.9.42)–(1.9.44) в уравнение (1.8.9), получим [31]

$$du^{\alpha}/ds = -\Gamma^{\alpha}{}_{00}(u^0)^2 - 2\,\Gamma^{\alpha}{}_{0\beta}\,u^0 u^{\beta} - \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} u^{\beta} u^{\gamma} \qquad (1.9.46)$$

и, используя выражения (1.9.41) для компонент 4-скорости, после преобразований получим

$$\frac{du^a}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{v^{\alpha}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{g_{00}^{;\alpha}}{2g_{00}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\sqrt{g_{00}}\,(g_{;\beta}^{\alpha} - g_{\beta}^{;\alpha})v^{\beta}}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\lambda_{\beta\gamma}^{\alpha} v^{\beta} v^{\gamma}}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}. \qquad (1.9.47)$$

Ускорение есть производная от 3-мерной скорости по собственному времени, определенное с помощью трехмерного ковариантного дифференциала [31]:

$$a^{\alpha} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{Dv^{\alpha}}{ds} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{d}{ds}\frac{v^{\alpha}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\lambda_{\beta\gamma}^{\alpha} v^{\beta} v^{\gamma}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

(1.9.48)

С учетом (1.9.47) для 3-мерного ускорения локального участка стационарно искривленной метрической протяженности с метрикой (1.9.32) окончательно имеем (для удобства опускаем индекс α) [31]:

$$a_{\alpha} = \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\frac{\partial \ln\sqrt{g_{00}}}{\partial x^a} + \sqrt{g_{00}}\,\left(\frac{\partial g_{\beta}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)\frac{v^{\beta}}{c}\right\} \qquad (1.9.49)$$

или в обычных трехмерных векторных обозначениях [31]:

$$\vec{a} = \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-grad\,(\ln\sqrt{g_{00}}) + \sqrt{g_{00}}\left[\frac{\vec{v}}{c}\times rot\,\vec{g}\right]\right\}, \qquad (1.9.50)$$

где

$$\mathbf{g} = \vec{g}\,(g_1, g_2, g_3),$$

(1.9.51)

или в компонентном виде $g_{\alpha} = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}$;

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{d\tau} = \frac{c\,d\vec{l}}{\sqrt{g_{00}}\left(dx^0 + \dfrac{g_{\alpha\beta}}{g_{00}}\,dx^\alpha\right)} \qquad (1.9.52)$$

– трехмерная локальная скорость исследуемого участка стационарно искривленной метрической протяженности относительно «решимо».

Выражение (1.9.49) будет иметь большое значение для дальнейших приложений. Еще раз отметим, что оно получено при условии стационарности исследуемого участка метрической 4-протяженности, т. е. когда компоненты метрического тензора g_{ij}, входящие в квадратичную форму (1.9.32), не зависят от времени x^0.