

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Батанов М.С.¹, к.т.н., доцент каф. 207
Московского авиационного института
Москва, Россия

Аннотация: Основанные понятия квантовой механики (такие, как: «волны материи» де Бройля, «принцип неопределенности» Гейзенберга, отсутствие размеров и траектории движения у элементарных частиц, универсальность постоянной Планка, а также уравнение Шредингера), до сих пор не достаточно логически обоснованы. Интерес к истокам квантовой механики обусловлен еще тем, что передовые рубежи науки в области изучения структурной организации материи - струнные теории, базирующиеся на квантовой механике, находятся в практически непреодолимых (*на мой взгляд*) затруднениях. Это заставляет вернуться к переосмыслению основ квантовой физики.

В нижеизложенной статье предложена модель хаотически блуждающей материальной частицы (обладающей размером и траекторией движения), на основании которой удалось:

- выразить постоянную Планка \hbar через основные характеристики стационарного случайного процесса;
- обосновать переход от координатного представления состояния частицы к ее импульсному представлению без привлечения идеи о существовании «волн материи» де Бройля и «принципа неопределенности» Гейзенберга.
- вывести уравнение Шредингера на основании принципа экстремума усредненного действия хаотически блуждающей частицы;

При этом выявлены условия и границы применения обобщённого уравнения Шредингера к описанию явлений, как микромира, так и макромира.

Промежуточный результат *«определение плотности распределения вероятности производной n -го порядка для n раз дифференцируемого, случайного, стационарного процесса»* может быть применим во многих областях теории вероятности и статистической физики.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, постоянная Планка, ядро электрона, плотность распределения вероятности производной случайного процесса, частица, хаотическая траектория, координатное представление.

¹ alsignat@yandex.ru

1. Краткая история возникновения уравнения Шредингера

Одной из основных загадок квантовой механики и, следовательно, всех современных продолжений данной теории, остается тайна появления уравнения Шредингера. Отсутствие логически обоснованного вывода данного исходного уравнения отрицательно влияет на развитие наших представлений о структурной организации материи.

Уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + U(x, y, z) \psi, \quad (1)$$

где $\psi = \psi(x, y, z, t)$ – волновая функция, характеризующая состояние элементарной частицы; $U(x, y, z)$ – потенциальная энергия элементарной частицы; \hbar – постоянная Планка; m – масса частицы.

Считается, что это уравнение было получено Эрвином Шредингером (1887 – 1961) на основании индуктивных и дедуктивных предпосылок, сложившихся к 1926 году в результате экспериментальных исследований свойств элементарных частиц.

Особое значение в то время имела идея Луи де Бройля (1892 – 1987) о возможности существования волновых свойств у движущейся материальной частицы. В своей докторской диссертации «Исследования по теории квантов» (1924 г.) Луи де Бройль сопоставил прямолинейную траекторию движения свободной частицы с прямым лучом света, и пришел к выводу, что они описываются одним и тем же уравнением Якоби, вытекающим из фундаментального принципа «экстремума действия». Оказалось, что траектория движения свободной частицы и луч света являются экстремалами практически одного и того же функционала действия. Данное обстоятельство натолкнуло Луи де Бройля на мысль, что если волне, описываемой уравнением

$$w = \exp\{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})\}, \quad (2)$$

(где ω – циклическая частота; \mathbf{k} – волновой вектор; t – время; \mathbf{r} – пространственный вектор), присущи некоторые свойства частицы, то вполне возможно обратное утверждение, что движущейся материальной частице может соответствовать некая плоская волна

$$\psi = \exp\{i(Et - \mathbf{p}\mathbf{r})/\hbar\}, \quad (3)$$

где E – кинетическая энергия движущейся частицы; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – ее импульс.

Кроме того, Луи де Бройль был знаком с результатами экспериментов старшего брата Мориса де Бройля, связанными с физикой рентгеновского излучения, и с пионер-

скими работами М. Планка и А. Эйнштейна по квантовой природе излучения и поглощения света. Это и позволило ему в 1923 – 1924 гг. предположить, что движущейся частице можно поставить в соответствие некое колебательное возмущение ψ с частотой

$$\omega = E/\hbar \quad (4)$$

и длиной волны

$$\lambda = 2\pi\hbar/|p|. \quad (5)$$

Эта идея была поддержана П. Ланжевром и А. Эйнштейном, но большинство физического сообщества отнеслась к ней скептически. Однако в 1927 – 1930 гг. сразу несколько групп экспериментаторов (К. Дэвиссон и Л. Джермер, О. Штерн и И. Эстерман и др.) показали, что идея существования волн материи, предложенная Л. де Бройлем, применима для описания явления дифракции электронов и атомов на кристаллах.

В одной из ранних работ 1925 – 1926 гг. Эрвин Шредингер, критически относясь к статистике Бозе – Эйнштейна, задался вопросом: – «Почему бы не начать с волнового представления частиц газа, а затем наложить на такие «волны» условия квантования «а-ля условие Дебая»? После чего следует ключевая мысль: – «Это означает не что иное, как необходимость серьезно отнестись к предложенной Л. де Бройлем и А. Эйнштейном волновой теории движущихся частиц».

Следующая статья Шредингера уже содержала уравнение (1), положившее начало интенсивному развитию квантовой механики, наряду с великими работами Макса Планка, Альберта Эйнштейна, Нильса Бора и Вернера Гейзенберга.

Доводы, приведенные Шредингером при выводе уравнения (1), впоследствии были признаны специалистами неверными, однако само уравнение оказалось верным. Это не единственный случай в науке. Например, основные уравнения электродинамики также были получены Джеймсом Клерком Максвеллом из неверных предположений о механических свойствах эфира.

За девяносто лет, прошедших с 1926 года много исследователей предлагали различные способы вывода уравнений Шредингера. Но, насколько мне известно, ни одна из этих попыток не увенчалась успехом. Основы квантовой механики и по сей день вызывают дискуссии в научном сообществе.

Безуспешных попыток вывести уравнение Шредингера было так много, что стало совершенно очевидным, что добиться этого результата в рамках квантово - механической логики невозможно.

Рассмотренная в данной статье модель хаотически блуждающей частицы (обладающей объемом и непрерывной траекторией движения), явно противоречит неопозитивистским воззрениям, но приводит к выводу уравнения Шредингера, в чем ниже вам и предлагается убедиться.

2. Модель блуждающей частицы

Рассмотрим частицу, обладающую небольшим объемом по сравнению с областью окружающего ее пространства (рис.1). Условно будем называть данную частицу «точкой».

Допустим, что данная «точка» постоянно хаотически блуждает в окрестностях условного «центра» (совмещенного с началом системы координат $X Y Z$) под действием множества не связанных между собой силовых факторов.

Примерами постоянно блуждающей «точки» могут послужить: колебания атома в кристаллической решетке, полеты мухи в банке, дрожание ядра внутри биологической клетки, шевеление эмбриона в утробе матери, блуждания кончика ветки под порывами ветра и т. п.

Предположим, что такое хаотическое движение «точки», продолжается «вечно», поскольку ее полная механическая энергия E всегда остается постоянной

$$E = T(x, y, z, t) + U(x, y, z, t) = const, \quad (6)$$

где $T(x, y, z, t)$ – кинетической энергия «точки», обусловленная скоростью ее движения;

$U(x, y, z, t)$ – потенциальная энергия «точки», связанная с силой, стремящейся вернуть «точку» в условный «центр» (например, с силой упругости).

Таким образом, в рассматриваемой модели каждая из энергий $T(x, y, z, t)$ и $U(x, y, z, t)$ «точки» является случайной функцией времени и места ее положения относительно «центра». Но эти энергии плавно перетекают друг в друга таким образом, что их сумма (т. е. полная механическая энергия E) всегда остается постоянной.

Если скорость хаотического блуждания «точки» в окрестности условного «центра» (рис. 1) невелика, то согласно нерелятивистской механике, она обладает кинетической энергией

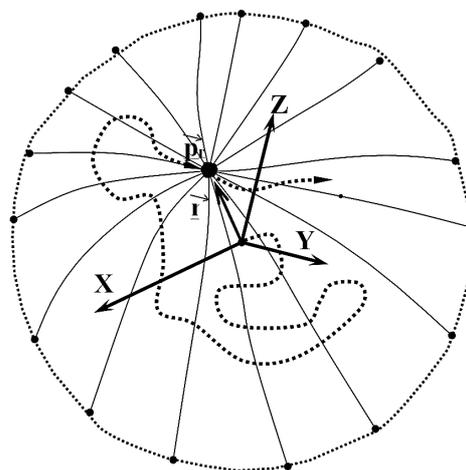


Рис.1. Частица («точка»), хаотически блуждающая в окрестности условного «центра» таким образом, что ее полная механическая энергия E всегда остается постоянной ($E = const$)

$$T(x, y, z, t) = \frac{p_x^2(x, y, z, t) + p_y^2(x, y, z, t) + p_z^2(x, y, z, t)}{2m}. \quad (7)$$

Для сокращения записей вместо (7) будем писать

$$T(t) = \frac{p_x^2(t) + p_y^2(t) + p_z^2(t)}{2m}, \quad (8)$$

где $p_x(t), p_y(t), p_z(t)$ – мгновенные значения компонент импульса блуждающей «точки»,

$$|\vec{p}| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}, \quad (9)$$

$$p_i = mv_i = m \frac{dx_i}{dt} = m \cdot x_i'. \quad (10)$$

Вид потенциальной энергии «точки» $U(x, y, z, t)$ не конкретизируется.

Действие рассматриваемой «точки» S в нерелятивистской механике определено следующим образом [1]

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} [T(p_x, t) - U(x, t)] dt + Et. \quad (11)$$

Для упрощения выкладок здесь рассмотрен одномерный случай, не ограничивающий общность заключений. В случае трех измерений увеличивается только число интегрирований.

Из-за сложности движения блуждающей «точки» нас будет интересовать не само действие (11), а его усреднение по времени (или по реализациям)

$$\bar{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i(t) = \int_{t_1}^{t_2} [\overline{T(p_x, t)} + \overline{U(x, t)}] dt + \bar{E}t. \quad (12)$$

Напомним, что для эргодического случайного процесса имеет место равенство между усреднением по времени и усреднением по реализациям.

Знак плюс в подынтегральном выражении (12) поставлен потому, что усредненная потенциальная энергия $\overline{U(x, t)}$ отрицательна, т. к. она всегда в среднем стремится вернуть «точку» в условный «центр» исследуемого в среднем сферически симметричного образования (рис. 2). Усреднение

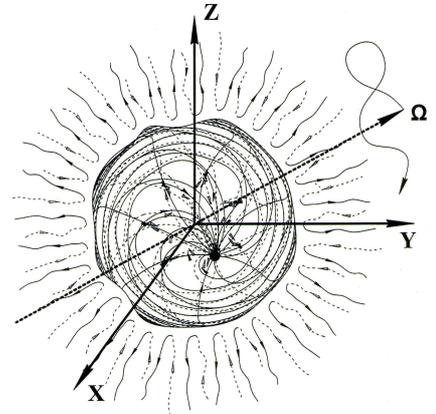


Рис.2. В среднем сферически симметричное образование, внутри которого постоянно хаотически блуждает частица («точка»)

(12) осуществляется по реализациям, взятым за один и тот же промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

Усредненную кинетическую энергию блуждающей «точки» представим в виде

$$\overline{T(p_x, t)} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x) p_x^2 dp_x, \quad (13)$$

где $\rho(p_x)$ – плотность распределения вероятности (ПРВ) составляющей импульса p_x материальной «точки».

Усредненную потенциальную энергию «точки» представим в виде

$$\overline{U(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) U(x) dx, \quad (14)$$

где $\rho(x)$ – ПРВ места нахождения проекции на ось x «точки», блуждающей в окрестности условного «центра» (рис.1 и 2).

Подставляя (13) и (14) в усредненное действие (12), получим

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x) p_x^2 dp_x + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) U(x) dx \right\} dt + \bar{E}t. \quad (15)$$

Для дальнейшего вывода уравнения Шредингера ниже приведены два вспомогательных пункта. Первый пункт, являющийся разработкой автора [2, 3], посвящен определению плотности распределения вероятности производной n -го порядка n раз дифференцируемого, случайного стационарного процесса. Вторым пунктом «Координатное представление усредненного импульса частицы» позаимствован из работы Д.И. Блохинцева [5] для удобства ссылок.

3. Определение плотности распределения вероятности производной n -го порядка n раз дифференцируемого, случайного, стационарного процесса

Определение способа нахождения плотности распределения вероятности (ПРВ) производной стационарного в узком смысле случайного процесса при известной ПРВ самого этого процесса является ключом к пониманию квантовой механики и границ ее применения. Решение данной задачи позволяет обосновать квантово-механическую процедуру перехода от координатного представления к импульсному и, наоборот без привлечения гипотезы о существовании волн материи де Бройля. Это становится возможным в силу того, что импульс частицы (материальной «точки») линейно связан с производной от ее координаты $p_x = m \cdot \partial x / \partial t = m x'$.

Кроме того, проблема определения одномерной ПРВ $\rho_1[\zeta^n(t)]$ – производной n -го порядка n раз дифференцируемого случайного стационарного процесса $\zeta(t)$, при известной только его одномерной ПРВ $\rho_1[\zeta(t)]$, возникает в ряде других задач радиофизики и статистической механики.

Отметим вначале общие свойства первой производной случайного стационарного процесса $\zeta(t)$. Для этого рассмотрим m его реализаций (рис. 3).

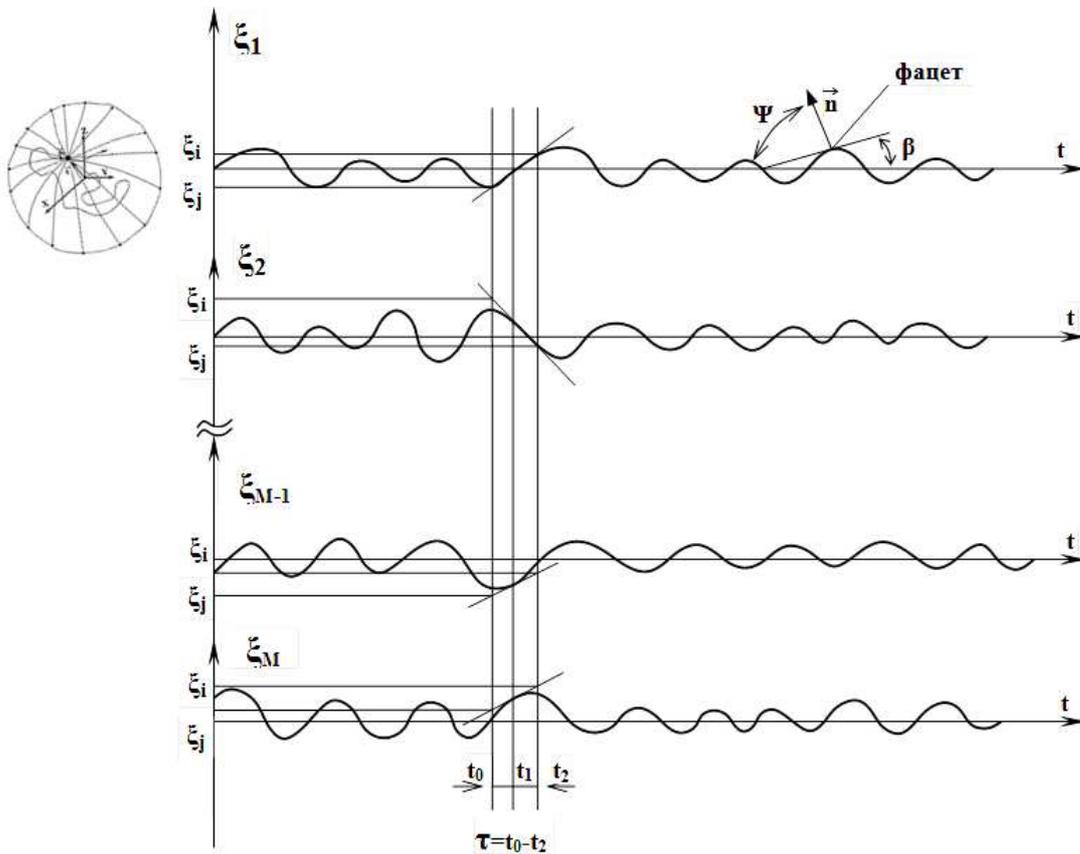


Рис. 3. Реализации, по крайней мере, один раз дифференцируемого случайного стационарного процесса $\zeta(t)$

Из рис. 3 видно, что значение случайной величины $\zeta(t_i)$ в сечении t_i и значение производной этого процесса $\zeta'(t_i) = \frac{\partial \zeta(t_1)}{\partial t_1}$ при том же значении аргумента t_i являются независимыми, а следовательно, и некоррелированными, случайными величинами. Данное утверждение может быть выражено аналитически [6]

$$\langle \zeta(t_i) \zeta'(t_i) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [\zeta(t_i)]^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle [\zeta(t_i)]^2 \rangle = 0, \quad (16)$$

где $\langle \rangle$ означает усреднение по реализациям. Здесь учтено, что операции дифференцирования и усреднения в данном случае являются коммутативными, и что все усреднен-

ные характеристики стационарного в узком смысле процесса являются постоянными величинами, в том числе его дисперсия не зависит от времени $\langle [\xi(t_i)]^2 \rangle = const$.

Реализации стационарного случайного процесса $\xi(t_i)$, показанные на (рис. 3), можно интерпретировать, как изменения со временем проекции места нахождения блуждающей «точки» на ось X (рис.2 и 3), т.е. $x(t) = \xi(t)$.

Однако даже при статистической независимости случайных величин ξ_i и ξ'_i некая связь между ПРВ $\rho_1(\xi_i)$ и ПРВ $\rho_1(\xi'_i)$ существует. Это вытекает из известной процедуры получения ПРВ производной $\rho_1(\xi'_i)$ при известной двумерной ПРВ случайного стационарного процесса [6,7]

$$\rho_2(\xi_i, \xi_j) = \rho_2(\xi_i, t_i; \xi_j, t_j). \quad (17)$$

Для этого в выражении (17) необходимо сделать замену переменных

$$\xi_i = \xi_k - \frac{\tau}{2} \xi'_k; \quad \xi_j = \xi_k + \frac{\tau}{2} \xi'_k; \quad t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \quad t_j = t_k + \frac{\tau}{2}, \quad (18)$$

где

$$\tau = t_j - t_i; \quad t_k = \frac{t_j + t_i}{2}$$

с якобианом преобразования $[J] = \tau$. В результате из ПРВ (17) получим

$$\rho_2(\xi_k, \xi'_k) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \rho_2\left(\xi_k - \frac{\tau}{2} \xi'_k, t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_k + \frac{\tau}{2} \xi'_k, t_k + \frac{\tau}{2}\right). \quad (19)$$

Далее, интегрируя полученное выражение по ξ_k , найдем искомую ПРВ производной исходного процесса в сечении t_k [6,7]:

$$\rho_1(\xi'_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_2(\xi_k, \xi'_k) d\xi_k. \quad (20)$$

Формальная процедура (17) – (20) позволяет решить задачу определения ПРВ $\rho_1(\xi'_k)$ при известной двумерной ПРВ (17). Однако двумерные ПРВ определены для очень ограниченного класса случайных процессов. Поэтому необходимо рассмотреть возможность получения ПРВ $\rho_1(\xi'_k)$ при известной одномерной ПРВ $\rho_1(\xi_i)$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующими свойствами случайных процессов:

1. Двухмерная ПРВ любого случайного процесса может быть представлена в виде [6,7]

$$\rho_2(\xi_i, t_i; \xi_j, t_j) = \rho_1(\xi_i, t_i) \rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i), \quad (21)$$

где $\rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i)$ – условная ПРВ.

2. Для стационарного в узком смысле случайного процесса справедливо тождество [6,7]

$$\rho_1(\xi_i, t_i) = \rho_1(\xi_j, t_j). \quad (22)$$

3. Условная ПРВ случайного стационарного процесса при $t_i \rightarrow t_j$ вырождается в дельта-функцию [7]

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho_2(\xi_i, t_i / \xi_j, t_j) = \delta(\xi_i - \xi_j). \quad (23)$$

На основании вышеперечисленных свойств рассмотрим случайный процесс на участке $] t_i - \tau; t_i + \tau [$ при $\tau \rightarrow 0$ посредством следующей формальной процедуры. ПРВ $\rho_1(\xi_i) = \rho_1(\xi_i, t_i)$ и $\rho_1(\xi_j) = \rho_1(\xi_j, t_j)$ всегда можно представить в виде произведения двух функций

$$\rho(\xi_i) = \varphi(\xi_i) \varphi(\xi_i) = \varphi^2(\xi_i), \quad (24)$$

$$\rho(\xi_j) = \varphi(\xi_j) \varphi(\xi_j) = \varphi^2(\xi_j),$$

где $\varphi(\xi_i)$ – плотность амплитуды вероятности (ПАВ) случайной величины ξ_i в сечении t_i .

Для стационарного случайного процесса справедливо тождество

$$\varphi(\xi_i) = \varphi(\xi_j), \quad (25)$$

в чем легко убедиться, взяв квадратный корень от обеих частей тождества (22). Тогда, согласно (24), получим (25). Отметим, что тождество (25) приближенно справедливо и для большинства нестационарных случайных процессов при $\tau \rightarrow 0$, т. е.

$$\varphi(\xi_i, t_i) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \varphi(\xi_j, t_j = t_i - \tau). \quad (26)$$

При выполнении условия (25) выражение (21) может быть представлено в симметричном виде

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \varphi(\xi_i) \rho(\xi_j / \xi_i) \varphi(\xi_j), \quad (27)$$

где $\rho(\xi_j / \xi_i)$ – условная ПРВ, или в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \rho \left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2} \right] = \\ & = \varphi \left[\xi_i, t_j = t_k - \frac{\tau}{2} \right] \rho \left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2} / \xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2} \right] \varphi \left[\xi_i, t_i = t_k + \frac{\tau}{2} \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Устремим в (28) τ к нулю, но таким образом, чтобы интервал τ равномерно слева и справа стягивался в точку $t_k = (t_j - t_i)/2$, тогда с учетом (23) из (27) получим

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(\xi_i, \xi_j) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \varphi(\xi_i) \rho(\xi_j / \xi_i) \varphi(\xi_j) \right\} = \varphi(\xi_{ik}) \delta(\xi_{ik} - \xi_{ik}) \varphi(\xi_{jk}), \quad (29)$$

где ξ_{ik} – результат стремления случайной величины $\zeta(t_i)$ к случайной величине $\zeta(t_k)$ слева; ξ_{jk} – результат стремления случайной величины $\zeta(t_j)$ к случайной величине $\zeta(t_k)$ справа.

Проинтегрировав обе части выражения (29) по ξ_{ik} и ξ_{jk} , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \delta(\xi_{jk} - \xi_{ik}) \varphi(\xi_{jk}) d\xi_{ik} d\xi_{jk} = 1. \quad (30)$$

Выражение (30) является формальным математическим тождеством из теории обобщенных функций, учитывающим свойства дельта-функции (δ -функции). Для того, чтобы наполнить выражение (30) физическим содержанием, необходимо задать конкретный вид δ -функции.

Определим вид δ -функции для марковского случайного процесса.

Рассмотрим непрерывный случайный марковский процесс, для которого справедливо уравнение Эйнштейна - Фоккера [7,8]

$$\frac{\partial \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial t} = B \frac{\partial^2 \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial \xi^2}, \quad (31)$$

где B – коэффициент диффузии.

Это дифференциальное уравнение параболического типа имеет три решения, одно из которых может быть представлено в виде [7,8]

$$\rho_2(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_j - \xi_i) - q^2 B(t_j - t_i)\} dq, \quad (32)$$

где q – обобщенный параметр.

При $t_j - t_i = \tau \rightarrow 0$ из (32) получим одно из определений δ -функции

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm 0} \rho(\xi_i / \xi_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dq = \delta(\xi_j - \xi_i), \quad (33)$$

Поскольку данный результат получен для предельного случая, т.е. при $\tau \rightarrow 0$, то не исключено, что δ -функция (33) может соответствовать не только марковскому, но и многим другим стационарным случайным процессам.

Подставив полученную δ -функцию (33) в выражение (30), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \varphi(\xi_{jk}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dq d\xi_{ik} d\xi_{jk}. \quad (34)$$

Поменяв в (34) порядок интегрирования, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \exp\{-iq\xi_{ik}\} d\xi_{ik} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{jk}) \exp\{iq\xi_{jk}\} d\xi_{jk} \right] dq. \quad (35)$$

Учтем, что, согласно (25), $\varphi(\xi_{ik}) = \varphi(\xi_{jk})$ и что с учетом свойств δ -функции $\xi_{ik} = \xi_{jk} = \xi_k$. При этом выражение (35) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q) \varphi^*(q) dq = 1, \quad (36)$$

где
$$\varphi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{-iq\xi_k\} d\xi_k, \quad (37)$$

$$\varphi^*(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{iq\xi_k\} d\xi_k. \quad (38)$$

Подынтегральное выражение $\varphi(q)\varphi^*(q)$ в интеграле (36) отвечает всем требованиям ПРВ $\rho(q)$ случайной величины q :

$$\rho(q) = \varphi(q)\varphi^*(q) = |\varphi(q)|^2. \quad (39)$$

Выясним теперь, что представляет собой случайная величина q . Для этого вернемся к рассмотрению выражения (32). Результат интегрирования в правой части этого выражения не зависит от величины q . Поэтому ее можно рассматривать как некую обобщенную частоту. Однако физическая постановка задачи и формализм математической записи выражения (32) накладывают на величину q следующие ограничения:

1) величина q должна характеризовать случайный процесс в исследуемом интервале $]t_i - \tau_0; t_i + \tau[$ при $\tau \rightarrow 0$;

2) величина q , согласно математической записи правой части выражения (32), должна принадлежать множеству действительных чисел ($q \in R'$), имеющему мощность континуума, т. е. q должна иметь возможность принимать любое значение из диапазона $] - \infty, \infty [$;

3) q должна быть случайной величиной.

Всем трем требованиям удовлетворяют любая из следующих случайных величин, связанных со случайным процессом на исследуемом интервале τ :

$$\xi'_i = \frac{\partial \xi_k}{\partial t}, \quad \xi''_i = \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2}, \quad \dots, \quad \xi^{(n)}_i = \frac{\partial^n \xi_k}{\partial t^n}. \quad (40)$$

Однако эти случайные величины характеризуют процесс не в равной степени. Рассмотрим одну из реализаций исследуемого процесса. Функция $\xi(t)$ (рис. 3) в интер-

вале $[t_i ; t_j = t_i + \tau]$ при $\tau < \tau_{\text{кор}}$ (где $\tau_{\text{кор}}$ – радиус корреляции случайного процесса) может быть разложена в ряд Тейлора-Маклорена

$$\xi(t_j) = \xi(t_i) + \xi'(t_i)\tau + \frac{\xi''(t_i)}{2}\tau^2 + \dots + \frac{\xi^{(n)}(t_i)}{n!}\tau^n + \dots \quad (41)$$

Запишем выражение (41) в следующем виде

$$\frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi'_i + \frac{\xi''_i}{2!}\tau + \dots + \frac{\xi^{(n)}_i}{n!}\tau^{n-1} + \dots \quad (42)$$

Так же как в (33), устремим τ к нулю, при этом (42) сводится к тождеству

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi'_k \quad (43)$$

Таким образом, единственной случайной величиной, удовлетворяющей всем вышеперечисленным требованиям на исследуемом временном интервале $[t_i = t_k - \tau/2; t_j = t_k + \tau/2]$, при $\tau \rightarrow 0$, является первая производная исходного случайного процесса ξ'_k в сечении t_k . Следовательно, остается положить, что случайная величина q в выражениях (32) – (39) линейно связана только с ξ'_k , т. е.

$$q = \frac{\xi'_k}{\eta}, \quad (44)$$

где $1/\eta$ – коэффициент пропорциональности.

Подставляя (44) в (36) – (39), получим следующую искомую процедуру получения ПРВ производной $\rho(\xi'_k)$ случайного стационарного марковского (возможно и другого) процесса $\xi(t)$ в сечении t_k при известной одномерной ПРВ $\rho(\xi_k)$ в том же сечении:

1. Заданная одномерная ПРВ $\rho(\xi)$ представляется в виде произведения двух плотностей амплитуд вероятности (ПАВ) $\varphi(\xi)$:

$$\rho(\xi) = \varphi(\xi)\varphi(\xi). \quad (45)$$

2. Осуществляются два преобразования Фурье

$$\varphi(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \exp\{i\xi'\xi/\eta\} d\xi, \quad (46)$$

$$\varphi^*(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \exp\{-i\xi'\xi/\eta\} d\xi. \quad (47)$$

3. Окончательно для произвольного сечения случайного стационарного марковского процесса получим искомую ПРВ производной

$$\rho(\xi') = \varphi(\xi')\varphi^*(\xi') = |\varphi(\xi')|^2. \quad (48)$$

Еще раз отметим, что процедура (45) – (48) может быть применима, не только к стационарным марковским процессам, но и ко многим другим стационарным случайным процессам, для которых при $\tau \rightarrow 0$ δ -функция в (30) принимает вид (33).

Для выяснения физического смысла коэффициента пропорциональности $1/\eta$ воспользуемся сравнением с известными результатами. Данный подход небезупречен с точки зрения математической строгости, но позволяет достаточно эффективно получить конкретный, практически важный результат.

Рассмотрим стационарный гауссовский случайный процесс. При этом в каждом сечении этого процесса случайная величина ξ распределена по гауссовому закону:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\left\{-\frac{(\xi - a_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2}\right\}, \quad (49)$$

где σ_ξ^2 и a_ξ – дисперсия и математическое ожидание данного процесса $\xi(t)$.

Осуществляя с ПРВ (49) последовательность операций (45) – (48), получим ПРВ производной рассматриваемого случайного процесса:

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\eta/2\sigma_\xi]^2}} \exp\left\{-\frac{\xi'^2}{2[\eta/2\sigma_\xi]^2}\right\}, \quad (50)$$

С другой стороны, с помощью известной процедуры (17) – (20) для аналогичного случая получим [6,7]

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi'}^2}} \exp\left\{-\frac{\xi'^2}{2\sigma_{\xi'}^2}\right\}, \quad (51)$$

где $\sigma_{\xi'} = \sigma_\xi/\tau_{кор}$, $\tau_{кор}$ – радиус корреляции исходного, случайного процесса $\xi(t)$.

Сравнивая выражения (50) и (51), находим, что при

$$\eta = \frac{2\sigma_\xi^2}{\tau_{кор}} \quad (52)$$

эти ПРВ полностью совпадают.

Выражение (52) получено для гауссовского случайного процесса, но σ_ξ – среднеквадратическое отклонение и $\tau_{кор}$ – радиус корреляции – это основные характеристики любого стационарного случайного процесса. Все остальные начальные и центральные моменты в случае негауссового распределения случайной величины $\xi(t)$ дадут малый (незначительный) вклад в выражение (52), поэтому с высокой степенью достоверности можно утверждать, что оно применимо для большого класса стационарных случайных процессов.

Необходимо отметить, что в статистической физике и квантовой механике для перехода от координатного представления функции состояния элементарной частицы к ее импульсному представлению применяется формальная процедура, практически полностью аналогичная процедуре (45) – (48). Различие заключается только в определении коэффициента пропорциональности $1/\eta$.

В квантовой механике хорошо известно, что если проекция на ось x положения свободной элементарной частицы (например, электрона) описывается гауссовым распределением [9]

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right\}, \quad (53)$$

где σ_x – среднеквадратичное отклонение проекции положения элементарной частицы на ось x в окрестности среднего значения (т.е. «центра» системы), то в результате операций, аналогичных операциям (45) – (48), получается, что ПРВ составляющей импульса p_x элементарной частицы тоже гауссова [9]

$$\rho(p) = |\psi(p_x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{p_x}^2}} \exp\left\{-\frac{p_x^2}{2\sigma_{p_x}^2}\right\} \quad (54)$$

со среднеквадратичным отклонением

$$\sigma_{p_x} = \frac{\hbar}{2\sigma_x}, \quad (55)$$

где $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц – постоянная Планка.

Если теперь учесть, что составляющая импульса элементарной частицы (например, электрона) p_x равна

$$p_x = m_e \frac{dx}{dt} = m_e x', \quad (56)$$

где m_e - масса покоя электрона, то ПРВ (54) с учетом (55) принимает вид

$$\rho(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\hbar/(m_e 2\sigma_x)]^2}} \exp\left\{-\frac{x'^2}{2[\hbar/(m_e 2\sigma_x)]^2}\right\}. \quad (57)$$

Сравнивая (50) и (57) с учетом (52) и $\zeta' = x'$, обнаруживаем, что для рассматриваемого случая

$$\eta = \frac{2\sigma_{ex}^2}{\tau_{ex}} = \frac{\hbar}{m_e}, \quad (58)$$

где

$$\tau_{ex} = \frac{2m_e \sigma_{ex}^2}{\hbar} = \frac{2 \cdot 0,91 \cdot 10^{-30}}{1,055 \cdot 10^{-34}} \cdot \sigma_{ex}^2 = 1,73 \cdot 10^4 \sigma_{ex}^2 \quad (59)$$

– радиус корреляции стационарного случайного процесса, который является результатом проекции хаотического движения «точки» (электрона) на ось x возле условного неподвижного «центра» системы (рис. 1 и 2).

σ_{ex} – среднеквадратичное отклонение проекции хаотически движущейся «точки» (электрона) на ось x в окрестности среднего значения (т.е. условного «центра» системы).

Из выражения (58) следует, что постоянная Планка это не некая фундаментальная константа, а величина, выражаемая через основные усредненные параметры стационарного случайного процесса

$$\hbar = \frac{2\sigma_{cx}^2 m}{\tau_{cx}}, \quad (60)$$

где в общем случае:

σ_{cx} – среднеквадратичное отклонение проекции хаотически движущейся частицы («точки») на ось x в окрестности среднего значения (т.е. «центра» системы);

τ_{cx} – радиус корреляции данного стационарного случайного процесса.

Для многих приложений более важно не само выражение (60), а связанное с ним соотношение (52), которое в общем случае удобно представить в следующем виде

$$\eta_c = \frac{2\sigma_{cx}^2}{\tau_{cx}} = \frac{\hbar}{m}. \quad (61)$$

Отметим следующие промежуточные выводы:

1. Квантово-механический переход от координатного представления к импульсному применим не только к процессам мира элементарных частиц, а к любым случайным стационарным марковским (*и возможно многим другим*) процессам, как в микромире, так и в макромире. Например, ветка дерева, постоянно хаотически колеблющаяся возле среднего положения (условного «центра») под действием быстро меняющихся направлений порывов ветра, ведет себя аналогично поведению элементарной частицы в «потенциальной яме». Колебания ветки также имеет дискретный (квантовый) набор усредненных состояний в зависимости от интенсивности порывов ветра. При слабых порывах ветра ветка в основном колеблется возле условного «центра», при этом положение ее конца может быть описано гауссовым распределением. При более интенсивных порывах ветра конец ветки в среднем

вращается по кругу; при еще больших порывах ветра ее конец в основном описывает восьмерку, и т.д. В зависимости от силы ветра конец ветки может в среднем описывать дискретный набор фигур Лиссажу. Другими словами, квантово-механический формализм не является эксклюзивной особенностью микромира, он также применим и к статистическому описанию многих хаотических процессов макромира.

3. Алгоритм (45) – (48) перехода от координатного представления $\rho(\xi_i)$ к импульсному $\rho(m\xi_i)$ и обратно получается при конкретном виде δ -функции (33). Интересно проанализировать, что получится при других видах δ -функции?

4. На основании вышеизложенного можно получить ПРВ $\rho(\xi_i'')$ - второй производной исходного, по крайней мере дважды дифференцируемого, случайного процесса. Для этого в качестве случайного процесса следует рассматривать не сам процесс $\xi(t)$, а его первую производную $\xi'(t) = \partial\xi(t)/\partial t$. Тогда распределение второй производной можно определить посредством той же процедуры (45) – (48), только при этом вместо $\rho(\xi_i)$ в (45) – (48) необходимо подставить уже $\rho(\xi_i')$.

Аналогично может быть получена ПРВ $\rho(\xi_i^{(n)})$ любой производной n раз дифференцируемого случайного стационарного процесса с помощью следующей рекуррентной процедуры:

$$\rho(\xi^{(n-1)}) = \varphi(\xi^{(n-1)})\varphi(\xi^{(n-1)}); \quad (62)$$

$$\varphi(\xi^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi^{(n-1)}) \exp\left\{-\frac{i\xi^{(n)}\xi^{(n-1)}}{\eta_n}\right\} d\xi^{(n-1)}; \quad (63)$$

$$\varphi^*(\xi^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi^{(n-1)}) \exp\left\{\frac{i\xi^{(n)}\xi^{(n-1)}}{\eta_n}\right\} d\xi^{(n-1)}; \quad (64)$$

$$\rho(\xi^{(n)}) = \varphi(\xi^{(n)})\varphi^*(\xi^{(n)}),$$

где

$$\eta_n = \frac{2\sigma_{\xi^{(n-1)}}^2}{\tau_{кор\ \xi^{(n-1)}}}, \quad (65)$$

$\sigma_{\xi^{(n-1)}}^2, \tau_{кор\ \xi^{(n-1)}}$ – дисперсия и радиус корреляции $n-1$ раз дифференцируемого случайного стационарного процесса.

5. Процедура (45) – (48) полностью аналогичная квантово-механической процедуре перехода от координатного представления квантовой системы к ее импульсному представлению, получена здесь на основании исследования реализаций

обычного случайного стационарного процесса, т.е. без привлечения феноменологических принципов корпускулярно-волнового дуализма.

Также нет необходимости использовать гипотезу де Бройля о существовании волн материи для описания дифракции атомов и электронов на кристалле. Отсылаем, например, к п. 2.9.6 в зеленой части Алгебры сигнатур [3], где получена формула для расчёта объемной диаграммы (индикатрисы) рассеяния частиц на многослойной периодической поверхности кристалла:

$$\rho(\nu, \omega / \vartheta, \gamma) = 4\pi n_1^2 k_\kappa \frac{\sin^2[\pi n_1 / 2 - k_\kappa \sqrt{(a^2 + b^2)/c^2} / 2]}{[(\pi n_1)^2 - k_\kappa^2 (a^2 + b^2)/c^2]^2} \cdot \left| \frac{c(a'_\nu b'_\omega - a'_\omega b'_\nu) + c'_\nu (b a'_\omega - a b'_\omega)}{c^2 \sqrt{a^2 + b^2}} \right|, \quad (66)$$

где

$$a = \cos \nu \cos \omega + \cos \vartheta \cos \gamma, \quad b = \cos \nu \sin \omega + \cos \vartheta \sin \gamma, \quad c = \sin \nu + \sin \vartheta, \quad a'_\nu = -\sin \nu \cos \omega, \\ b'_\nu = -\sin \nu \sin \omega, \quad c'_\nu = \cos \nu, \quad a'_\omega = -\cos \nu \sin \omega, \quad b'_\omega = \cos \nu \cos \omega$$

углы ϑ , γ , ω и ν показаны на рис.4

$$k_\kappa = r_{\text{кор}} n_1^{1/2} / (0,066 l_1),$$

здесь:

l_1 – толщина одного слоя, т. е. одной синусоидальной эквипотенциальной поверхности;

n_1 – число слоев, эффективно участвующих в рассеянии частиц;

$r_{\text{кор}}$ – усредненный радиус кривизны одной синусоидальной эквипотенциальной поверхности. Для монокристалла у всех синусоидальных эквипотенциальных поверхностей $r_{\text{кор}}$ один и тот же и по сути означает эффективное сечение рассеяния атомами кристалла электронов.

Результаты расчёта по формуле (66) при угле падения частиц на поверхность кристалла $\vartheta = 45^\circ$ и азимутальном угле $\gamma = 0^\circ$, а также при $r_{\text{кор}} = 0,0000000001 = 10^{-10}$ см, $l_1 = 0,000000001 = 10^{-9}$ см, $n_1 = 1940$ (слоев), показан на рис. 4

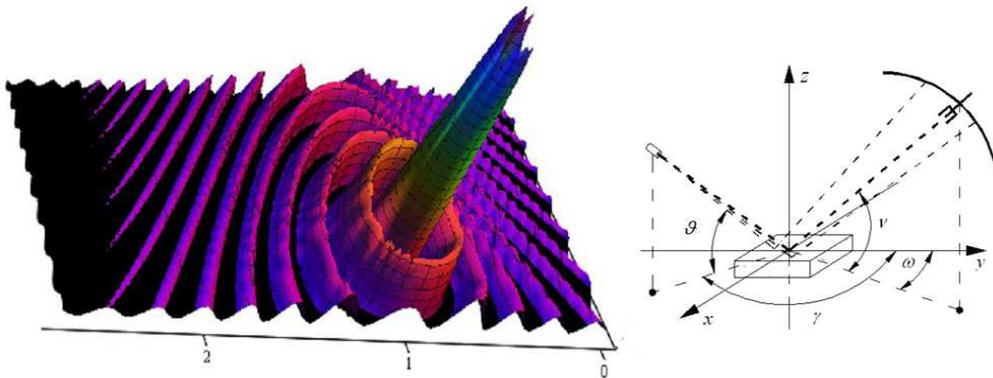


Рис. 4. Диаграмма (индикатриса) рассеяния частиц (электронов) на 1740 слоях синусоидальных эквипотенциальных поверхностей кристалла, рассчитанная по формуле (66) с помощью программного обеспечения MathCad 14 [3, 14]

4. Координатное представление усредненного импульса частицы

Содержание данного пункта хорошо известно специалистам в области квантовой механики, однако ввиду удобства ссылок и важности последующих выводов, приведенные ниже выкладки практически полностью переписаны из [5].

Напомним сначала о свойствах интеграла Дирихле, фигурирующего в теории интегралов Фурье и теории обобщенных функций [5]:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b \varphi(z) \frac{\sin kz}{z} dz = \begin{cases} 0, & \text{если } a, b > 0 \text{ или } a, b < 0, \\ \varphi(0), & \text{если } a < 0, b > 0. \end{cases} \quad (67)$$

так как

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin kz}{z} = \delta(z) \quad (68)$$

– это одна из разновидностей δ -функции.

Рассмотрим для сокращения выкладок случай одного измерения и докажем справедливость равенства [5]

$$\overline{p_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(p_x) p_x^n dp_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(p_x) p_x^n \psi(p_x) dp_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x, t) dx, \quad (69)$$

где n – целая, положительная степень; $\overline{p_x^n}$ – усреднение по времени (или по реализациям) возведенной в степень n компоненты импульса

$$p_x^n = (m \cdot \partial x / \partial t)^n = (mx')^n; \quad (70)$$

$\psi(x)$ и $\psi(p_x)$ – плотности амплитуды вероятности (ПАВ), которые вводятся как (24) [$\psi(x) = \varphi(x)$] и (48) [$\psi(p_x) = \varphi(p_x) = \varphi(mx')$], и согласно (46) и (47) связаны между собой (при условии стационарности случайного процесса), преобразованиями Фурье:

$$\psi(p_x = mx') = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{i \frac{x'x}{\eta_4}}}{(2\pi)^{1/2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{i \frac{p_x x}{\hbar}}}{(2\pi)^{1/2}} dx; \quad (71)$$

$$\psi^*(p_x = mx') = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{-i \frac{x'x}{\eta_4}}}{(2\pi)^{1/2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{-i \frac{p_x x}{\hbar}}}{(2\pi)^{1/2}} dx;$$

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x') \frac{e^{i \frac{x'x}{\eta_4}}}{(2\pi)^{1/2}} dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(p_x) \frac{e^{i \frac{p_x x}{\hbar}}}{(2\pi)^{1/2}} dp_x; \quad (72)$$

$$\psi^*(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x') \frac{e^{-i \frac{x'x}{\eta_4}}}{(2\pi)^{1/2}} dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(p_x) \frac{e^{-i \frac{p_x x}{\hbar}}}{(2\pi)^{1/2}} dp_x,$$

где параметр η_4 определен соотношением (61)

$$\eta_{\psi} = \frac{2\sigma_{\psi}^2}{\tau_{\psi}} = \frac{\hbar}{m}. \quad (73)$$

Для доказательства утверждения (69), подставим в него вместо $\psi(p_x)$ и $\psi^*(p_x)$ их выражения через интегралы (71) [5]:

$$\overline{p_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x_k) \frac{e^{i p_x x_k / \hbar}}{(2\pi)^{1/2}} dx_k \cdot p_x^n \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_l) \frac{e^{-i p_x x_l / \hbar}}{(2\pi)^{1/2}} dx_l \right] dp_x. \quad (74)$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$p_x^n e^{-i p_x x_l / \hbar} = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_l} \right)^n e^{-i p_x x_l / \hbar}. \quad (75)$$

Подставляя (75) в (74) получим:

$$\overline{p_x^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x_k) e^{i p_x x_k / \hbar} dx_k \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_l) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_l} \right)^n e^{-i p_x x_l / \hbar} dx_l \right] dp_x. \quad (76)$$

Проинтегрируем второй интеграл в подынтегральном выражении n раз по частям, причем будем предполагать, что $\psi(x)$ и ее производные обращаются в нуль на границах интегрирования $x = \pm \infty$. Выполняя данные действия, найдем [5]

$$\overline{p_x^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x_k) e^{i p_x x_k / \hbar} dx_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i p_x x_l / \hbar} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_l} \right)^n \psi(x_l) dx_l \right] dp_x. \quad (77)$$

Переменим порядок интегрирования, и будем сначала интегрировать по p_x [5]:

$$\overline{p_x^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x_k) dx_k \int_{-\infty}^{+\infty} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x_l} \right)^n \psi(x_l) dx_l \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i p_x (x_k - x_l) / \hbar} dp_x. \quad (78)$$

Введем переменные $\zeta = p_x / \hbar$, $z = x_k - x_l$. Выполняя в последнем интеграле в (78) интегрирование по ζ в конечных пределах от $-k$ до $+k$, а затем, переходя к пределу $k \rightarrow \infty$, данное выражение приводится к виду [5]

$$\begin{aligned} \overline{p_x^n} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) \right] dx \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x+z) dz \frac{\sin kz}{\pi z} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) \right] dx \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x+z) \delta(z) dz. \end{aligned} \quad (79)$$

На основании свойств интеграла Дирихле (67), при $a = -\infty$; $b = +\infty$, $\psi(z) = \psi^*(x+z)$ имеем [5]

$$\overline{p_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) \right] \psi^*(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) dx \quad (80)$$

или

$$\overline{p_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x, t) dx, \quad (81)$$

где

$$\psi(x, t) = \psi(x) \exp\{iu\} \quad (82)$$

$$\psi^*(x, t) = \psi^*(x) \exp\{-iu\}$$

(u – произвольное действительное число), тем самым доказано выражение (69) [5].

С помощью (70) и (73) аналогично можно получить

$$\overline{x'^n} = \overline{\left(\frac{dx}{dt} \right)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \left(i\eta_q \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) dx. \quad (83)$$

Обобщение на три измерения сводится к увеличению числа интегрирований [5].

5. Вывод уравнения Шредингера

Вернемся к рассмотрению усредненного действия хаотически блуждающей частицы («точки») (15)

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x) p_x^2 dp_x + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) U(x) dx \right\} dt + \bar{E}t, \quad (84)$$

Представим действие (84) в координатном виде. Для этого выполним следующие операции.

1. Запишем ПРВ $\rho(x)$ в виде произведения двух плотностей амплитуды вероятности (П АВ) $\psi(x)$:

$$\rho(x) = \psi(x, t) \psi^*(x, t), \quad (85)$$

где

$$\psi(x, t) = \psi(x) \exp\left\{i \frac{Et}{\hbar}\right\}, \quad (86)$$

$$\psi^*(x, t) = \psi^*(x) \exp\left\{-i \frac{Et}{\hbar}\right\}. \quad (87)$$

2. Воспользуемся координатным представлением усредненного импульса, возведенного в степень n (81). При этом в частности имеем

$$\overline{p_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(p_x) p_x^2 dp_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x,t) \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x,t) dx, \quad (88)$$

3. Используя (88), представим усредненную кинетическую энергию «точки» (13) в виде

$$\overline{T} = \frac{1}{2m} \overline{p_x^2} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x) p_x^2 dp_x = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) \frac{\partial^2 \psi^*(x,t)}{\partial x^2} dx, \quad (89)$$

Усредненная потенциальная энергия «точки» (14) с учётом (85) принимает вид

$$\overline{U} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) U(x) \psi^*(x,t) dx, \quad (90)$$

Проверкой легко убедиться в том, что

$$E = \overline{E} = \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar \psi(x) e^{iEt/\hbar} \frac{\partial \psi(x) e^{-iEt/\hbar}}{\partial t} dx = const, \quad (91)$$

или с учетом (86), (87)

$$E = \overline{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) \frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t} dx \quad (92)$$

4. Подставляя выражения (89), (90) и (92) в (84), получим запись усредненного действия блуждающей «точки» в координатном виде

$$\overline{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) \frac{\partial^2 \psi^*(x,t)}{\partial x^2} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) U(x) \psi^*(x,t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} i\hbar \psi(x,t) \frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t} dx \right\} dt \quad (93)$$

или

$$\overline{S} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x,t) \frac{\partial^2 \psi^*(x,t)}{\partial x^2} + \psi(x,t) U(x) \psi^*(x,t) + \psi(x,t) i\hbar \frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t} \right) dx dt \quad (94)$$

Условие экстремальности усредненного действия (94) требует обращения в ноль его первой вариации (все последующие операции соответствуют формализму вариационного исчисления [12])

$$\delta \overline{S} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \psi(x,t) \frac{\partial^2 \psi^*(x,t)}{\partial x^2} + \psi(x,t) U(x) \psi^*(x,t) + \psi(x,t) i\hbar \frac{\partial \psi^*(x,t)}{\partial t} \right) dx dt = 0 \quad (95)$$

Экстремаль функционала (95), т. е. функция $\psi(x,t)$, при которой усредненное действие (95) принимает экстремальное значение, определяется уравнением Эйлера – Пуассона [12]. Данное уравнение для лагранжиана L , являющегося подынтегральным выражением в функционале действия

$$S = \int L \left(x, t, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} \right) dx dt, \text{ где } z = \psi(x, t), \quad (96)$$

имеет вид [12]

$$L_z - \frac{\partial}{\partial x} \{L_p\} - \frac{\partial}{\partial t} \{L_g\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{L_r\} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{L_t\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \{L_s\} = 0, \quad (97)$$

здесь

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}; \quad g = \frac{\partial z}{\partial t}; \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \{L_p\} = L_{px} + L_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + L_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + L_{gp} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (98)$$

– полная частная производная по x .

Аналогично

$$\frac{\partial}{\partial t} \{L_g\} = L_{gt} + L_{gz} \frac{\partial L}{\partial t} + L_{gp} \frac{\partial p}{\partial t} + L_{gs} \frac{\partial g}{\partial t} \quad (99)$$

и т. д.

Используя подынтегральное выражение из усредненного действия (95), определим

$$L_z = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + 2\psi(x)U(x) + i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{L_t\} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \{L_p\} = 0; \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \{L_s\} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \{L_g\} = 2i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{L_r\} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}.$$

Подставляя эти выражения в (97), получим искомое уравнение для определения экстремали $\psi(x, t)$ функционала усреднённого действия (95)

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + U(x) \psi(x, t), \quad (100)$$

где

$$\psi(x, t) \psi^*(x, t) = |\psi(x)|^2 = \rho(x)$$

– ПРВ проекции на ось x места нахождения частицы («точки»), блуждающей возле условного «центра» так, что ее полная механическая энергия E всегда остается постоянной ($E = const$), а сама данная проекция $x(t)$ является стационарным случайным процессом.

Обобщение на три измерения, сводятся к увеличению числа интегрирований, при этом имеем

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial r^2} + U(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t), \quad (101)$$

где

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left\{-i\left(\frac{Et}{\hbar}\right)\right\},$$

\mathbf{r} – радиус-вектор с началом в «центре» исследуемого образования ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) (рис.1).

Выражение (101) является не чем иным, как уравнением Шредингера (1) с борновским пониманием смысла волновой функции $\psi(\vec{r}, t) = \psi(x, y, z, t)$. Но в этом случае «постоянная Планка» \hbar – это не фундаментальная константа, а параметр, выраженный через соотношение усредненных характеристик исследуемого стационарного случайного процесса (60)

$$\hbar = \frac{2\sigma_{cx}^2 m}{\tau_{cx}},$$

Если обе части уравнения (101) сократить на \hbar то получим

$$i \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial r^2} + U(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t).$$

С учетом (61) данное уравнение принимает

$$i \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\eta_c}{2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial r^2} + U(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t), \quad (102)$$

где

$$\eta_c = \frac{2\sigma_{cr}^2}{\tau_{cr}}, \quad (103)$$

здесь

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{3} \sqrt{\sigma_{cx}^2 + \sigma_{cy}^2 + \sigma_{cz}^2} \quad (104)$$

– усредненное среднеквадратичное отклонение хаотически движущейся частицы (материальной «точки») от условного «центра» (рис. 1);

$$\tau_{cr} = \frac{1}{3} \sqrt{\tau_{cx}^2 + \tau_{cy}^2 + \tau_{cz}^2} \quad (105)$$

– усредненный радиус корреляции (точнее автокорреляции) рассматриваемого случайного процесса.

Уравнение (102) будем называть обобщённым уравнением Шредингера, т.к. оно пригодно для описания наиболее вероятных состояний точечных объектов как микромира, так и макромира при условии стационарности рассматриваемого случайного процесса и постоянстве его полной механической энергии.

Уравнение (102) одинаково хорошо описывает дискретные наборы усредненного поведения электрона в потенциальной яме, ядра в цитоплазме биологической клетки,

эмбриона в утробе матери, ядра в недрах планеты, мухи в банке и т. д. Все эти стабильные случайные процессы обладают возможностью перехода из одного стационарного состояния в другое с поглощением или выделением конкретной порции полной механической энергии.

Таким образом, вместе с выводом обобщённого уравнения Шредингера (102) мы приходим к осознанию того, что квантовые переходы присущи не только объектам атомного масштаба, но и фрактально проявляются на всех уровнях организации материи.

Предложенный в данной статье подход позволил вывести основное уравнение нерелятивистской квантовой физики, исходя из принципов в корне отличающихся от идейных устоев неопозитивизма. Однако сама квантовая механика, созданная плеядой великих ученых, от этого совершенно не пострадала. Напротив, при этом только укрепились ее логические основания.

Подобным образом могут быть получены все основные уравнения квантовой теории поля: уравнение Клена-Гордона, уравнения Дирака, уравнения Максвелла и т. д. Алгоритм их вывода аналогичен подходу, приведенному в данной статье:

- 1) записывается детерминистское действие системы;
- 2) данное действие усредняется;
- 3) все усредненные слагаемые в подынтегральном выражении усредненного действия представляются через плотности распределения вероятности $\rho(x)$ и/или $\rho(p_x)$;
- 4) производится переход всех слагаемых лагранжиана усредненного действия в координатное или в импульсное представление;
- 5) определяется уравнение для экстремали получившегося функционала (усредненного действия) по средствам методов вариационного исчисления.

Данный алгоритм может быть положен в обоснование процедуры первичного квантования.

Значимость приведенного здесь вывода обобщённого уравнения Шредингера (102) заключается в следующем:

- становится понятным, к каким явлениям микро- и макромира оно относится, каковы границы и условия его применения.

- отпала необходимость в привлечении «принципа неопределённости» Гейзенберга и представлений о «волнах материи» де Бройля, поскольку при выводе уравнения (102) получена процедура (45) – (48) полностью аналогичная переходу от координатного представления к импульсному, и наоборот, опираясь только на анализ свойств стационарного случайного процесса.

- отношение \hbar/m («постоянная Планка» на массу) подается определению через дисперсию и коэффициент корреляции (основные усредненные характеристики) исследуемого стационарного случайного процесса. Поэтому обобщенное уравнение Шредингера (102) не содержит «массу» частицы m , и из-за которой приходится вводить дополнительную размерную константу – постоянную Планка \hbar . «Масса» является (по мнению автора) одной из самых «темных» размерных величин современной физики (см. п. 1.7.10 в [2] и гл. 7 в [3]). Несомненно, что в окончательной теории понятие «масса» должно отсутствовать, и данная статья – это один из шагов в направлении искоренения этого понятия из научных представлений об окружающей Реальности.

- возвращаются к рассмотрению объем и траектория блуждающей частицы. Вместе с ними физика микромира вновь приобретает привычную логическую «почву под ногами».

Конечно, представления об отсутствие траектории и размеров элементарных частиц были введены в квантовую физику из-за ряда проблем, связанных:

- с неустойчивостью распределенного (неточечного) заряда;
- с неделимостью элементарных частиц (т.к. если бы такая частица имела размер, то можно было бы так ударит по одной ее части, что она непременно бы оторвалась бы от другой ее части, но этого не происходит);
- с глобальной нелокальностью элементарных частиц, т.к. в ряде экспериментов они вообще проявляют себя как распределенные по пространству волны.

Однако на многие из этих вопросов уже есть ответы в рамках полностью геометризованных теорий, одной из которых является «Алгебра сигнатур» (представленная на веб-сайте www.alsignat.narod.ru)

Основные тезисы данной статьи были впервые частично опубликованы в порядке обсуждения в 1990 г. в [13, 14], благодаря моим наставникам: д.т.н. А. А. Кузнецову и д.ф.-м.н А. И. Козлову. Также отблагодарю д.ф.-м.н. А. А. Рухадзе и д.ф.-м.н. А. М. Игнатову за их решение опубликовать один из вариантов данной статьи в журнале «Инженерная физика» № 3 за 2016 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1988, С. 237.
2. Гаухман М.Х. Алгебра сигнатур «Пустота» (желтая Алсигна). – М.: УРСС, 2007, С. 308, www.alsignat.narod.ru.
3. Гаухман М.Х. Алгебра сигнатур «Частицы» (зеленная Алсигна). – М.: Либроком, 2008, С. 422, www.alsignat.narod.ru.
4. Гаухман М.Х. Алгебра сигнатур «Гравитация» (голубая Алсигна). – М.: Либроком, 2009, С. 294, www.alsignat.narod.ru.
5. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. – М.: Высшая школа, 1963, С. 620.
6. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику Ч.1. – М.: Наука, 1976, С. 494.
7. Тиханов В.И. Статистическая радиофизика. – М.: Радио и связь, 1982, С. 622.
8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1991, С. 383.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 1989, С. 767.
10. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. – М.: Эдиториал УРСС, 2000, С. 310.
11. Пригожин И. Стенгерс И. Время, хаос, квант. – М.: Эдиториал УРСС, 2001, С. 239.

12. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969, С. 424.

13. Батанов М.С. Качественно новое понимание структурной организации материи (вывод уравнения Шредингера). Проблемы технической эксплуатации и совершенствования РЭО. Межвузовский сб. науч. тр. – М.: РИО МИИГА, 1990, С. 145 - 156.

14. Батанов М.С. Влияние подстилающей поверхности на точностные характеристики квазидоплеровского пеленгатора. Диссертация кандидата тех. наук. – М.: МГТУ ГА, 1994. С. 214.

Derivation of Schrödinger's equation

Mikhail Batanov, Ph.D., Associate Professor
Department 207, Moscow Aviation Institute,
Moscow, Russia

Abstract The base concepts of quantum mechanics (such as the matter waves of deBroglie, the Heisenberg Uncertainty Principle, the lack of definite size and trajectory of elementary particles, the universality of Planck's constant and Schrödinger's equation) still lack sufficient logical justification. The interest in the origins of quantum mechanics is caused, among others, by the fact that the cutting edge of science in the study of structural organization of matter, string theory, is based on quantum mechanics. Yet there are, in my opinion, virtually insurmountable difficulties in this theory. This makes it necessary to rethink the foundations of quantum physics.

In this article, a model of a material particle in chaotic motion (while maintaining its size and trajectory) is presented. On the basis of this model, the following is achieved:

- ❖ to express Planck's constant \hbar through the main features of a stationary random process;
- ❖ to justify the transition from the coordinate representation of the state of the particle to its momentum representation without invoking the idea of the existence of de Broglie waves or the Heisenberg uncertainty principle.
- ❖ to derive Schrödinger equation on the basis of the principle of extremum of the mean of the action of a particle in chaotic motion.

At the same time, the conditions and limits of application of the generalized Schrödinger equation to describe phenomena on microscopic and macroscopic scales are highlighted.

An intermediate result, the determination of the density of the probability distribution of the n -th derivative of an n -th order differentiable, random, stationary process, can be applied in many areas of probability theory and statistical physics.

Keywords: Schrödinger equation, Planck's constant, electron core, probability density distribution, derivative of a random process, particle, chaotic trajectory, coordinate representation.

REFERENCES

[1] Batanov, M.S. (1990) Kachestvenno novoye ponimaniye strukturnoy organizatsii materii (vyvod uravneniya Shredingera). [A qualitatively new understanding of the structural organization of matter (Derivation of the Schrödinger equation)] in *Problemy tekhnicheskoy eksplu-*

- atatsii i sovershenstvovaniya REO.*[Technical operation problems and improvement in REO] Moscow, USSR: Mezhvuzovskiy sb. nauch. tr. RIO MIIGA. pp. 145 - 156. [In Russian]
- [2] Batanov, M.S. (1994) *Vliyaniye podstilayushchey poverkhnosti na tochnostnyye kharakteristiki kvazidoplerovskogo pelengatora* [The influence of land surface on precision characteristics of a quasi-Doppler direction finder.] Doctoral Dissertation. Moscow, USSR: Moscow State Technical University. [In Russian]
- [3] Blokhintsev, D.I. (1963) *Osnovy kvantovoy mekhaniki* [Principles of Quantum Mechanics]. Moscow, USSR: Vysshaya shkola. [In Russian]
- [4] Èl'sgol'ts, L.E. (1969) *Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow, USSR: Nauka. [In Russian]
- [5] Gaukhman, M. Kh. (2007) “Pustota” (zheltaya Alsigna). ["Void" (yellow Alsigna)]. In *Algebra signatur* [Algebra of signatures] Moscow, Russia: URSS. p. 308. (available in www.alsignat.narod.ru.) [In Russian]
- [6] Gaukhman, M.Kh. (2008) “Chastitsy” (zelennaya Alsigna). ["Particles" (green Alsigna)]. In *Algebra signatur* [Algebra of signatures]. Moscow, Russia: Librokom. (available in www.alsignat.narod.ru.) [In Russian]
- [7] Gaukhman, M.Kh. (2009) “Gravitatsiya” (golubaya Alsigna). ["Gravity" (blue Alsigna)]. In *Algebra signatur* [Algebra of signatures] Moscow, Russia: Librokom. (available in www.alsignat.narod.ru.) [In Russian]
- [8] Batanov, M.S. (2010) *Algebra signatur* [Algebra signature] in www.alsignat.narod.ru , Nicecorp.ru. Web. [In Russian]
- [9] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. (1988) *Mekhanika* [Mechanics]. Moscow, USSR: Nauka. [In Russian]
- [10] Landau, L.D.& Lifshitz, E.M. (1989) *Kvantovaya mekhanika. Nerelevativistskaya teoriya* [Quantum mechanics. Non-relativistic theory]. Moscow, USSR: Nauka. [In Russian]
- [11] Prigogine, I. & Stengers I. (2000) *Poryadok iz khaosa* [Order out of chaos]. Moscow, Russia: Editorial URSS. [In Russian]
- [12] Prigogine, I. & Stengers, I. (2001) *Vremya, kaos, kvant* [Time, chaos, quantum]. Moscow, Russia: Editorial URSS. [In Russian]
- [13] Ritov, S.M. (1976) *Vvedeniye v statisticheskuyu radiofiziku, Ch. 1* [Introduction to Statistical Radio Physics, Part 1]. Moscow, USSR: Nauka. [In Russian]
- [14] Tihanov, V.I. (1982) *Statisticheskaya radiofizika* [Statistical Radio Physics]. Moscow, USSR: Radio i svyaz', [In Russian]
- [15] Wentzel, E.S. & Ovcharov, L.A. (1991) *Teoriya sluchaynykh protsessov i yeye inzhernyye prilozheniya* [The theory of random processes and its engineering applications]. Moscow, USSR: Nauka. [In Russian]