

2.9.1. Хаотические блуждания ядра «электрона»

Рассмотрим вначале поведение ядра «электрона» с радиусом $\sim 10^{-13}$ см, которое для масштаба порядка $\sim 10^{-9}$ см может быть представлено в виде материальной точки (МТ).

Хаотические блуждания МТ бывают равновесными и неравновесными. Равновесные блуждания МТ, в свою очередь, можно подразделить еще на два типа: открытые и закрытые.

1. Открытые – это блуждания МТ в неограниченной области с постоянным и неизменным энергетическим обменом с окружающей средой (с бесконечным энергетическим резервуаром). Частным случаем этого широкаго класса процессов являются марковские процессы. Среди марковских процессов широко известно так называемое броуновское (или диффузионное) движение. В этом случае зона блужданий МТ неуклонно расширяется. Броуновское (диффузионное) движение описывается уравнением Эйнштейна – Фоккера (2.8.27), которое в свою очередь вытекает из более общего уравнения Фоккера – Планка или второго уравнения Колмогорова [39,40,41]. Для одномерного случая броуновского (диффузионного) движения плотность распределения вероятности места нахождения блуждающей МТ может быть задана гауссовой ПРВ (2.8.146)

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2(t)}} \exp\left\{-\frac{[x-a]^2}{2\sigma_x^2(t)}\right\},$$

где $\sigma_x^2(t)$ – переменная дисперсия диффузионного движения МТ, связанная с коэффициентом диффузии B выражением

$$\sigma_x^2(t) = \int_{t_0}^t B(\tau) d\tau,$$

или в случае, когда коэффициент диффузии постоянен ($B = \text{const}$):

$$\sigma_x^2(t) = B \cdot t.$$

2. Закрытые – это блуждания МТ в центрально-симметричном силовом поле, или внутри замкнутой области, при сохранении полной механической энергии. В этом случае средняя механическая энергия хаотично блуждающей МТ может иметь дискретный ряд значений. То есть МТ внутри замкнутой области может иметь множество энергетических уровней. Причем каждому энергетическому уровню МТ соответствует свой усредненный характер хаотического движения. Состояние такой системы с самым

нижним из возможных энергетических уровней называют основным энергетическим состоянием МТ, а все последующие – ее возбужденными состояниями.

Если поведение блуждающей МТ в центрально симметричном силовом поле носит характер случайного стационарного марковского процесса, то ее состояние описывается уравнением Шредингера (2.8.106)

$$i\eta_{MT} \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\eta_{MT}^2}{2\mu_{MT}} \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial r^2} + U(r) \psi(r,t), \quad (2.9.1)$$

где μ_{MT} – аналог массы МТ.

η_{MT} – аналог постоянной Планка для рассматриваемой МТ (в данном случае ядра «электрона»):

$$\eta_{MT} = \frac{2\sigma_{MT}^2}{\tau_{корMT}} \mu_{MT},$$

где в свою очередь σ_{MT} – среднее квадратичное отклонение МТ от истинного центра исследуемого вакуумного образования (см. рис.2.8.1); $\tau_{корMT}$ – радиус корреляции траектории движения МТ.

Конкретизируем теперь вид усредненной потенциальной энергии $U(r)$ хаотически блуждающей МТ.

При отклонении МТ (в данном случае ядра «электрона») от «истинного» центра некоего более глобального сферически симметричного вакуумного образования, например атома водорода (см. рис. 2.9.1), в окружающем МТ вакууме возникают напряжения. Эти напряжения приводят к возникновению усредненной силы упругости $F(r)$, стремящейся вернуть МТ в «истинный» центр рассматриваемого вакуумного образования. Пусть при удалении МТ от «истинного» центра на расстояние r усредненная сила упругости возрастает по закону Гука

$$F(r) \approx -k_{yn} r, \quad (2.9.2)$$

где k_{yn} – коэффициент упругого натяжения вакуума.

Усредненная потенциальная энергия МТ при этом, как известно, имеет вид

$$U(r) = \int F(r) \cdot dr = -\frac{1}{2} k_{yn} r^2. \quad (2.9.3)$$

Знак минус уже был учтен в подынтегральном выражении (2.9.3). Поэтому будем полагать, что для данного случая потенциальная энергия блуждающей МТ приближенно равна

$$U(r) \approx \frac{1}{2} k_{yn} r^2. \quad (2.9.4)$$

Подставляя усредненную потенциальную энергию МТ (2.9.4) в уравнение Шредингера (2.9.1), получим

$$i\eta_{MT} \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = -\frac{\eta_{MT}^2}{2\mu_{MT}} \frac{\partial^2 \psi(r,t)}{\partial r^2} + \frac{k_{yn} r^2}{2} \psi(r,t). \quad (2.9.5)$$

С учетом того, что система стационарна данное уравнение принимает следующий упрощенный вид

$$E_{MT} \psi(r) = -\frac{\eta_{MT}^2}{2\mu_{MT}} \frac{\partial^2 \psi(r)}{\partial r^2} + \frac{\mu_{MT} \omega_{0MT}^2 r^2}{2} \psi(r), \quad (2.9.6)$$

где

$$\omega_{0MT} = \sqrt{\frac{\mu_{MT}}{k_{yn}}} \quad (2.9.7)$$

– так называемая собственная частота «гармонического осциллятора», т. е. характерная частота «дрожания» МТ.

Уравнение типа (2.9.6) называется уравнением квантового осциллятора, и его решение приведено во многих учебниках по квантовой механике. Анализ этого уравнения приводит к следующим результатам [38]:

а). Полная механическая энергия исследуемой МТ может принимать дискретный ряд значений

$$E_{MTn} = \eta_{MT} \omega_{0MT} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.9.8)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ – главное квантовое число.

Данный энергетический спектр представляет собой систему эквидистантных (т. е. равноотстоящих друг от друга) энергетических уровней (рис. 2.9.2);

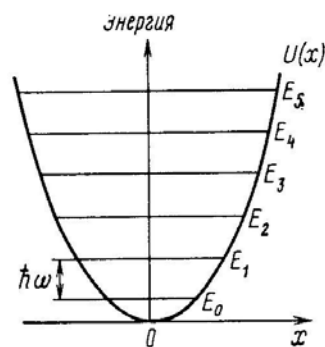


Рис. 2.9.2. Эквидистантные энергетические уровни квантового осциллятора [38]

б). Каждому дискретному значению полной механической энергии материальной «точки» E_{MTn} соответствует собственная функция состояния

$$\psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2}\right\} H_n(r), \quad (2.9.9)$$

где

$$H_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{r^2} \frac{\partial^n e^{-r^2}}{\partial r^n} \quad (2.9.10)$$

– полином Чебышева – Эрмита n -го порядка.

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\eta_{MT}}{\mu_{MT} \omega_{0MT}}} = \sqrt{\frac{\eta_{MT}}{k_{yn}}}. \quad (2.9.11)$$

Пользуясь выражениями (2.9.9) – (2.9.11), выпишем несколько собственных функций, описывающих поведение хаотически блуждающей МТ (в данном случае ядра «электрона»), в силовом поле с потенциальной энергией (2.9.4):

$$\psi_0(r) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_0 \sqrt{\pi}}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\lambda_0^2}\right\}, \text{ при } n=0; \quad (2.9.12)$$

$$\psi_1(r) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda_0 \sqrt{\pi}}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\lambda_0^2}\right\} \frac{2r}{\lambda_0}, \text{ при } n=1; \quad (2.9.13)$$

$$\psi_2(r) = \frac{1}{\sqrt{8\lambda_0 \sqrt{\pi}}} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\lambda_0^2}\right\} \left(\frac{4r^2}{\lambda_0^2} - 2\right), \text{ при } n=2. \quad (2.9.14)$$

Вид функций ψ_n (2.9.12) – (2.9.14) и квадрата их модуля $|\psi_n|^2$ представлен на рис. 2.9.3.

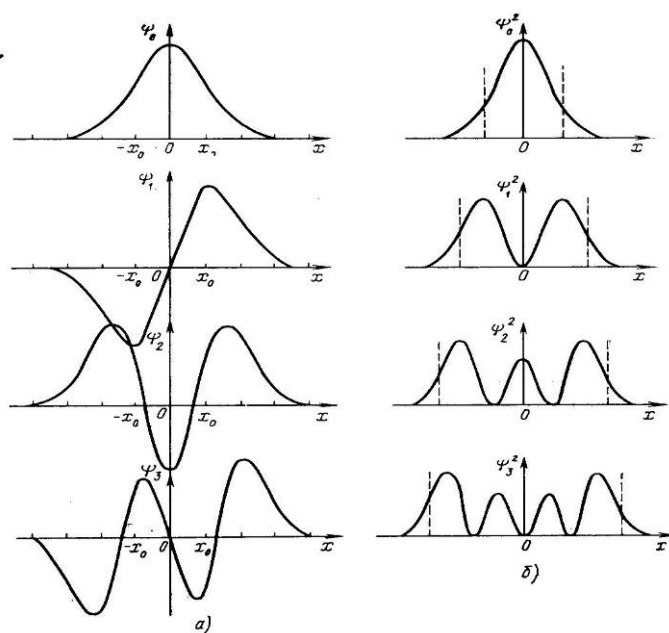


Рис. 2.9.3. а) амплитуды распределения вероятности места нахождения ядра «электрона» для различных его возбужденных состояний; б) плотности распределения вероятности места нахождения ядра «электрона» относительно истинного центра исследуемого вакуумного образования, для различных его возбужденных состояний

Из уравнения (2.9.8) следует, что даже в невозбужденном состоянии (т. е. при $n = 0$) полная механическая энергия МТ не равна нулю

$$E_{MT} = \frac{1}{2} \eta_{MT} \sqrt{\frac{k_{yn}}{\mu_{MT}}} . \quad (2.9.15)$$

В этом случае МТ (в частности ядро «электрона») непрерывно блуждает возле истинного центра исследуемого вакуумного образования так, что плотность распределения вероятности обнаружить ее в этой области описывается гауссовой кривой (рис. 2.9.3 б, верхний график), что соответствует максимуму энтропии (см. п. 2.8.8) данной системы.