3.11. Расстояния и промежутки времени [9]

«Сказал рабе Элазар (Талмуд, Сукка, 49б): «Глимут хасадим выше цдаки (благотворительности)», ибо (Ошеа, 10:12): «цдака (благотворительность) оказывается имуществом, а Глимут хасадим – телом; благотворительность оказывается бедным, Глимут хасадим – и бедным, и богатым; благотворительность оказывается живым, а Глимут хасадим – и живым и мертвым» [130] .

Для того чтобы разобраться в физическом смысле, заложенном в интервалах (3.65), (3.80), (3.82), (3.83ю), (3.83 э) и (3.105), рассмотрим, как определяется промежуток времени при известных компонентах метрического тензора g_{ij} в наиболее общем случае.

Определим сначала связь собственного времени τ с координатой x^0. Для этого рассмотрим два бесконечно близких события, происходящих в одной и той же точке естественной протяженности. Тогда интервал $<ds>^2$ между этими двумя событиями есть не что иное, как $c^2 d\tau^2$, где $d\tau$ – промежуток собственного времени между обоими событиями. Действительно, полагая в общем выражении (3.107) $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, находим

$$<ds>^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = g_{00}(dx^0)^2, \tag{3.112}$$

откуда

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0, \tag{3.113}$$

или для времени между двумя событиями в одной и той же точке протяженности имеем

$$\tau = \frac{1}{c}\int\sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{3.114}$$

Эти соотношения и определяют промежутки собственного времени для данной точки протяженности по изменению координаты x^0. Заметим также, что величина g_{00}, как видно из (3.114), должна быть положительной

$$g_{00} > 0\,. \tag{3.115}$$

Определим теперь элемент dl расстояния на протяженности. Для определения dl поступим теперь следующим образом. Пусть из некоторой точки B локального участка, например внешней стороны протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума (с координатами $x^\alpha + dx^\alpha$), отправляется световой сигнал в бесконечно близкую к ней точку A (с координатами x^α), а затем сразу обратно по тому же пути. Необходимое для этого время, отсчитываемое в одной и той же точке B, умноженное на c, есть, очевидно, удвоенное расстояние между обеими точками. Напишем интервал, выделив пространственные и временные координаты:

$$<ds>^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + 2g_{0\alpha}dx^0 dx^\alpha + g_{00}(dx^0)^2, \tag{3.116}$$

где, как обычно, по дважды повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование по значениям 1, 2, 3. Интервал между событиями, являющимися уходом и приходом сигнала из одной точки усредненного участка внешней стороны $\lambda_{m\div n}$ -вакуума в ту же точку, равен нулю. Решая уравнение (3.116) при $<ds>^2 = 0$ относительно dx^0, найдем два корня:

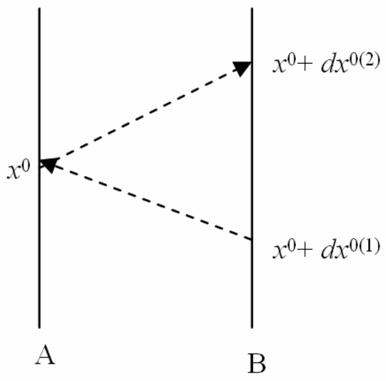

Рис. 3.11

$$\begin{aligned} dx^{0(1)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right), \\ dx^{0(2)} &= \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0\alpha}dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha}g_{0\beta} - g_{\alpha\beta}g_{00})dx^\alpha dx^\beta}\right), \end{aligned} \tag{3.117}$$

отвечающих распространению сигнала в «прямом» и «обратном» направлениях между точками A и B.

Если x^0 есть момент прибытия сигнала в точку A, то моменты его отправления из точки B и обратного возращения в точку B будут соответственно $x^0 + dx^{0(1)}$ и $x^0 + dx^{0(2)}$. На схематическом рис.3.11 сплошные прямые – это мировые линии, соответствующие заданным координатам x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$, а штриховые – это мировые линии, соответствующие световым сигналам[1]. Ясно, что полный промежуток «времени» между отправлением и возвращением сигнала в ту же точку равен:

$$dx^{0(2)} - dx^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}} \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{\alpha\beta} g_{00}) dx^\alpha dx^\beta}. \qquad (3.118)$$

Соответствующий промежуток истинного времени получается отсюда, согласно (3.113), умножением $\sqrt{g_{00}}/c$, а расстояние dl между обеими точками – еще умножением на величину $c/2$. В результате находим:

$$< dl >^2 = \left(- g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \right) dx^\alpha dx^\beta. \qquad (3.119)$$

Это и есть искомое выражение, определяющее расстояние на протяженности через элементы пространственных координат. Перепишем его в виде

$$<dl>^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta , \qquad (3.120)$$

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha} g_{0\beta}}{g_{00}} \qquad (3.121)$$

– есть 3-мерный метрический тензор, определяющий метрику одной из сторон исследуемого участка $\lambda_{m\div n}$ - вакуума.

Необходимо, однако, помнить, что g_{ik} зависят, вообще говоря, от x^0, так что и пространственная метрика (3.120) может меняться со временем. По этой причине не имеет смысла интегрировать $<dl>^2$ – такой интеграл зависел бы от того, по какой мировой линии между двумя заданными пространственными точками он брался.

Полезно заметить, что тензор – $\gamma_{\alpha\beta}$ является тензором, обратным контравариантному трехмерному тензору $g^{\alpha\beta}$. Действительно, расписав в компонентах равенство $g^{ik} g_{kl} = \delta^i_l$, имеем:

$$\begin{gathered} g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} + g^{\alpha 0} g_{0\gamma} = \delta^\alpha_\gamma, \\ g^{\alpha\beta} g_{\beta 0} + g^{\alpha 0} g_{00} = 0, \\ g^{0\beta} g_{\beta 0} + g^{00} g_{00} = 1. \end{gathered} \qquad (3.122)$$

Определив $g^{\alpha 0}$ из второго равенства и подставив в первое, получим:

$$- g^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma ,$$

что и требовалось доказать. Этот результат можно сформулировать иначе, сказав, что величины – $g^{\alpha\beta}$ составляют контравариантный трехмерный метрический тензор, отвечающий метрике (3.120):

$$\gamma^{\alpha\beta} = - g^{\alpha\beta}. \qquad (3.123)$$

Укажем также, что определители g и γ, составленные соответственно из величин g_{ik} и $\gamma_{\alpha\beta}$, связаны друг с другом простым соотношением:

$$- g = g_{00}\, \gamma . \qquad (3.124)$$

В ряде дальнейших применений нам будет удобно вводить трехмерный вектор g_α, ковариантные компоненты которого определяются как

$$g_\alpha = - g_{0\alpha} / g_{00} . \qquad (3.125)$$

Рассматривая g_α как вектор в пространстве с метрикой (3.120), мы должны определить его контравариантные компоненты как $g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta$. С помощью (3.123) и второго из равенств (3.122) легко видеть, что

$$g^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} g_\beta = - g^{0\alpha}. \qquad (3.126)$$

Отметим также формулу

$$g^{00} = 1/g^{00} - g_\alpha g^\alpha , \qquad (3.127)$$

следующую из третьего равенства в (3.122).

---

[1]) На рис. 3.11 предположено, что $dx^{0(2)} > 0$, $dx^{0(1)} < 0$, что, однако, необязательно: $dx^{0(1)}$ и $dx^{0(2)}$ могут оказаться и одного знака. Тот факт, что в таком случае значение $x^0(A)$ в момент прихода сигнала в A могло бы оказаться меньшим значения $x^0(B)$ в момент его выхода из B, не заключает в себе никакого противоречия, поскольку ход часов в различных точках протяженности не предполагается каким-либо способом синхронизованным.

Перейдем теперь к определению понятия одновременности. Выясним вопрос о возможности синхронизации часов, находящихся в разных точках внешней стороны протяженности вакуума. Такая синхронизация должна быть, очевидно, осуществлена с помощью обмена световыми сигналами между обеими точками.

Рассмотрим снова процесс распространения сигналов между двумя бесконечно близкими точками A и B, изображенными на рис. 3.11. Одновременным с моментом x^0 в точке A следует считать показание часов в точке B, лежащей посередине между моментами отправления и обратного прибытия сигнала в эту точку, т. е. момент

$$x^0 + \Delta x^0 = x^0 + ?\ \ (dx^{0(2)} + dx^{0(1)}).$$

Подставляя сюда (3.117), находим разность значений «времени» x^0 для двух одновременных событий, происходящих в бесконечно близких точках, в виде

$$\Delta x^0 = -\frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{g_{00}} \equiv g_\alpha dx^\alpha. \qquad (3.128)$$

Это соотношение дает возможность синхронизировать часы в любом бесконечно малом объеме внешней стороны псевдоповерхности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума. Продолжая подобную синхронизацию из точки A дальше, можно синхронизировать часы, т. е. определить одновременность событий вдоль любой незамкнутой линии.

Покажем, что изменение длин также является эффектом, связанным с условиями распространения световых сигналов по одной из сторон протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума. Определим элемент пространственного расстояния во вращающемся участке протяженности вакуума. С помощью (3.82) находим

$$\langle dl \rangle^2 = d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\varphi^2/(1 - \rho^2\Omega^2/c^2). \qquad (3.129)$$

Рис. 3.12

Пусть участок внешней стороны протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума вращается вокруг оси, излучающей импульс цилиндрической волны (см. рис. 3.9). Рассмотрим сечение (вид сверху) этого процесса в плоскости, где находится отражатель (рис. 3.12). Поскольку участок протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума вращается вокруг оси излучения, то первый луч, достигающий отражателя, распространяется по траектории 1, а обратно он вернется по траектории 2. В силу того, что в данном случае $dz = 0$, элемент пространственного расстояния будет иметь две составляющие:

$$\langle dl \rangle^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2/(1 - \rho^2\Omega^2/c^2). \qquad (3.130)$$

Первое слагаемое данного выражения ответственно за радиальную составляющую луча, а второе – за его тангенциальную составляющую. Очевидно, что увеличение пути распространения луча света и в этом случае не какой-то релятивистский эффект, а следствие вращательного движения внешней стороны протяженности $\lambda_{m \div n}$ -вакуума в рассматриваемой области.