4.8. Уравнение движения пробной точки [9, 22]

Данный и последующий пункты этой главы чисто технические. Эти материалы практически полностью взяты из [9] и предназначены лишь для удобства ссылок.

Под пробной точкой будем понимать помеченную «частицу» или «античастицу», размеры которой значительно меньше масштабов происходящих вакуумных процессов. То есть здесь мы полагаем, что пробная «частица» столь ничтожна по сравнению с увлекающими ее течениями исследуемого участка $\lambda_{m\div n}$ -вакуума, что ее инертными свойствами (массой) и размерами можно пренебречь.

Существует по меньшей мере два способа для получения уравнения движения пробной точки в составе значительно превышающей ее по размерам области $\lambda_{m\div n}$ -вакуума. Во-первых, уравнения движения могут быть получены из принципа наименьшего действия [9]

$$\delta S = -\,mc\,\delta\int ds = 0\,, \tag{4.212}$$

где m – масса пробной точки, т. е. сопротивляемость пробной «частицы» изменению ее состояния движения (т. е. изменению скорости и/или направления ее движения). Масса «частицы» зависит от ее внутренней структуры, которая будет рассматриваться ниже;

δ – этот значок в вариационном исчислении означает операцию варьирования, точнее, первую вариацию функционала (4.212).

Так как первая вариация от квадрата интервала равна

$$\delta\, ds^2 = 2ds\ \delta\, ds = \delta\,(g_{ik}\, dx^i dx^k\,) = dx^i dx^k\,(\partial g_{ik}/\partial x^l)\ \delta\, dx^l + 2\ g_{ik}\, dx^i\ d\delta x^k\,.$$

(в этом параграфе принято $g_{ik} = \varepsilon_{ik} + g_{ik}^{(0)}$), поэтому

$$\delta S = -mc\int\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{dx^l}\delta x^l + g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^k}{ds}\right\}ds =$$

$$= -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}\frac{\partial g_{ik}}{dx^l}\delta x^l - \frac{d}{ds}(g_{ik}\frac{dx^i}{ds})\delta x^k\right\}ds = 0$$

(при интегрировании по частям учтено, что на пределах $\delta\, x^k = 0$).

Во втором члене под интегралом заменим индекс k индексом l. Тогда находим, приравнивая к нулю коэффициент при произвольной вариации $\delta\, x^l$:

$$?\ \ u^i u^k\,(\partial g_{ik}/\partial x^l) - d(u^i g_{il})/ds = ?\ \ u^i u^k\,(\partial g_{ik}/\partial x^l) - g_{il}\, du^i/ds - u^i u^k(\partial g_{il}/\partial x^k) = 0,$$

где $u^i = dx^i/ds$ – 4-скорость пробной точки. Замечая, что третий член можно написать в виде

$$?\ \ u^i u^k\,(\partial g_{il}/\partial x^k + \partial g_{kl}/\partial x^i\,)$$

и вводя символы Кристоффеля

$$\Gamma_{l,ik} = ?\ \ (\partial g_{ik}/\partial x^l + \partial g_{il}/\partial x^k - \partial g_{kl}/\partial x^i), \tag{4.213}$$

получим

$$g_{il}\, du^i/ds + \Gamma_{l,ik}\, u^i u^k = 0\,.$$

Поднимая индекс l, окончательно получим

$$d^2x^i/ds^2 + \Gamma^{\,l}_{\ ik}\,(dx^k/ds)(dx^i/ds) = 0\,, \tag{4.214}$$

где

$$\Gamma^{\,l}_{\ ik} = ?\ \ g^{lm}\,(\partial g_{im}/\partial x^k + \partial g_{mk}/\partial x^i - \partial g_{ik}/\partial x^m). \tag{4.215}$$

Второй способ получения уравнения движения пробной точки заключается в следующем. Уравнение свободного движения выделенной точки в евклидовом пространстве имеет вид

$$du^i/ds = 0$$

или

$$du^i = 0\ . \qquad (4.216)$$

На гиперповерхности, описываемой римановой геометрией, обычное дифференцирование в (4.216) должно быть заменено ковариантным дифференцированием

$$\nabla_k\, u^i = 0\ . \qquad (4.217)$$

Из выражения (4.41) для ковариантного дифференциала вектора имеем

$$du^i + \Gamma^i{}_{kl}\, du^k\, du^l = 0\ . \qquad (4.218)$$

Разделив это уравнение на ds, находим уравнение движения пробной точки, путь которой повторяет четырехмерный ландшафт исследуемого вакуумного слоя, учитывающий не только искривления данной протяженности, но и ее течения

$$d^{\,2}x^i/ds^2 + \Gamma^i{}_{k\,l}\,(dx^k/ds)(dx^l/ds) = 0\ . \qquad (4.219)$$

Очевидно, что (4.219) и (4.214) полностью совпадают.

Таким образом, выражение (4.219) при определенных условиях может рассматриваться как уравнение свободного движения помеченной точки по четырехмерной протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума, описываемой четырехмерной римановой геометрией.

В ОТО интеграл действия S пробной точки в искривленном пространстве-времени записывается в виде (4.212) [9, 22]:

$$S = -mc\int ds = -mc\int L dt\ , \qquad (4.219а)$$

где

$$L = -mc\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}} \qquad (4.219б)$$

– лагранжиан системы.

В случае малых скоростей протекаемых процессов (т. е. при $v \ll c$) лагранжиан (4.219 б) можно представить в виде [22]

$$L = -mc\sqrt{g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}} = T - U\ , \qquad (4.219в)$$

где T и U – соответственно кинетическая и потенциальная энергия пробной точки.

Если 4-искривления протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума носят локальный характер, то на бесконечной удаленности от аномальной области они исчезают, при этом потенциальная энергия материальной точки $U_\infty = 0$. Следовательно, на бесконечности [22]

$$L_\infty = -mc\sqrt{\left(\eta_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)} = T, \qquad (4.219г)$$

где η_{ik} – метрический тензор пространства Минковского.

При этом из соотношений (4.219в) и (4.219г) имеем для потенциальной энергии пробной точки выражение [22]

$$U = T - L = mc\sqrt{\left(g_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)} - mc\sqrt{\left(\eta_{ik}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\right)}\ . \qquad (4.219д)$$

Оставим концовку данного пункта без комментариев. Отметим только, что эти выкладки, позаимствованные из работы Г. И. Шипова [22], потребуются в будущем.