4.9. Поле постоянных деформаций [9]

Поле деформаций называют постоянным, если можно выбрать такую систему отчета, в которой все компоненты тензора 4-деформаций явно не зависят от временной координаты x^0; последнюю называют в таком случае мировым временем.

Выбор мирового времени не вполне однозначен. Так, при добавлении к x^0 произвольной функции пространственных координат все ε_{ik} по-прежнему не будут содержать x^0; это преобразование соответствует произвольности выбора начала отсчета времени в каждой точке пространства[1]. Кроме того, разумеется, мировое время допускает умножение на произвольную постоянную, т. е. произвольный выбор единицы его измерения.

Если стабильное вакуумное образование, создающее поле деформаций, неподвижно (в системе отсчета, в которой ε_{ik} не зависит от x^0), то оба направления времени эквивалентны. В этом случае при должном выборе начала отсчета времени во всех точках протяженности исследуемого $\lambda_{m\div n}$ -вакуума интервал ds не должен меняться при изменении знака x^0, а потому все компоненты $\varepsilon_{0\alpha}$ тензора деформаций должны быть тождественно равными нулю. Такие постоянные поля 4-деформации называют статическими.

Неподвижность вакуумного образования не является обязательным условием постоянства создаваемого им поля деформаций и напряжений. Так, будет постоянным также и поле равномерно вращающегося вокруг своей оси аксиально-симметричного вакуумного образования. Но в этом случае оба направления времени уже отнюдь не равноценны – при изменении знака времени меняется знак угловой скорости вращения. Поэтому в таких постоянных полях деформации (которые называют стационарными) компоненты $\varepsilon_{0\alpha}$, вообще говоря, отличны от нуля.

В этом пункте мы также предпочитаем неявное представление тензора деформаций:

$$g_{ik} = \langle g_{ik}\rangle = \varepsilon_{ik} + \langle g_{ik}{}^0\rangle,$$

что для односторонней теории наиболее приемлемо. Другими совами, мы полагаем, что метрический тензор актуального состояния локального участка протяженности исследуемого участка $\lambda_{m\div n}$ -вакуума $g_{ik} = \langle g_{ik}\rangle$ содержит в себе информацию о тензоре его 4-деформации ε_{ik} и о метрическом тензоре его исходного, идеального состояния.

Смысл мирового времени в постоянном поле деформаций заключается в том, что его промежуток между двумя событиями в некоторой точке псевдосреды совпадает с его промежутком между любыми другими двумя событиями в любой другой точке рассматриваемой области протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума, соответственно одновременными с первой парой событий. Но одинаковым промежуткам мирового времени x^0 соответствуют в разных точках протяженности $\lambda_{m\div n}$ -вакуума различные промежутки собственного времени τ . Связь между ними можно написать теперь в виде

$$\tau = \frac{1}{2}\sqrt{g_{00}}\,x^0\,, \tag{4.220}$$

применимом к любым конечным промежуткам. Заметим также, что для элемента пространственного расстояния в статическом поле деформаций имеем просто

$$dl^2 = -\,g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha dx^\beta. \tag{4.221}$$

В стационарном поле $g_{0\alpha}$ отличны от нуля, и синхронизация часов во всем пространстве невозможна. Поскольку g_{ik} не зависят от x^0, то формулу для разности значений мирового времени двух одновременных событий, происходящих в разных точках пространства, можно написать в виде

$$\Delta x^0 = -\int \frac{g_{0\alpha}\,dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{4.222}$$

[1] Легко видеть, что при этом преобразовании пространственная метрика, как и следовало, не меняется. Действительно, при замене $x^0 \to x^0 + f\,(x^1, x^2, x^3)$ с произвольной функцией $f\,(x^1, x^2, x^3)$ компоненты g_{ik} заменяются согласно $g_{\alpha\beta} \to g_{\alpha\beta} + g_{00}\,f_{,\alpha} f_{,\beta} - g_{0\alpha} f_{,\beta} - g_{0\beta} f_{,\alpha}$; $g_{0\alpha} \to g_{0\alpha} - g_{00} f_{,\alpha}$, $g_{00} \to g_{00}$, где $f_{,\alpha} \equiv \partial f / \partial x^\alpha$.

применимом для любых двух точек на линии, вдоль которой производится синхронизация часов. При синхронизации же вдоль замкнутого контура разность значений мирового времени, которая обнаружилась бы по возвращении в исходную точку, равна интегралу

$$\Delta x^0 = -\oint \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}, \tag{4.223}$$

взятому по этому замкнутому контуру[1].

При движении пробной (помеченной) «частицы» в постоянном поле 4-деформаций сохраняется ее энергия, определяемая как производная ($-c\partial S/\partial x^0$) от действия по мировому времени; это следует, например, из того, что x^0 не входит явно в уравнение Гамильтона – Якоби. Определенная таким образом энергия есть временная компонента ковариантного 4-вектора импульса $p_k = mc\, u_k = mc\, g_{ki}\, u^i$ (где m – масса пробной точки, характеризующая меру ее инертности). В статистическом поле $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 - dl^2$, и мы имеем для энергии, которую обозначим здесь посредством E_0 :

$$E_0 = mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{ds} = mc^2 g_{00} \frac{dx^0}{\sqrt{g_{00}\left(dx^0\right)^2 - dl^2}}. \tag{4.224}$$

Введем скорость частицы:

$$v = \frac{dl}{d\tau} = \frac{cdl}{\sqrt{g_{00}}\, dx^0}, \tag{4.225}$$

измеренную в собственном времени, т. е. наблюдателем, находящимся в данном месте. Тогда мы получим для энергии:

$$E_0 = \frac{mc^2 \sqrt{g_{00}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.226}$$

Это есть величина, которая остается постоянной при движении помеченной точки подвижного участка протяженности $\lambda_{m\div n}$ *-вакуума*. Легко показать, что выражение (4.226) для энергии остается в силе и в стационарном поле 4-деформаций, если только ее скорость v измерять в собственном времени, определенном по часам, синхронизированным вдоль траектории точки. Если частица выходит из точки A в момент мирового времени x^0 и приходит в бесконечно близкую точку B в момент $x^0 + dx^0$, то для определения скорости надо взять теперь не промежуток времени

$$(x^0 + dx^0) - x^0 = dx^0,$$

а разность между $x^0 + dx^0$ и моментом $(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha)$, который одновременен в точке B моменту x^0 в точке A:

$$\left(x^0 + dx^0\right) - \left(x^0 - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha\right) = dx^0 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha. \tag{4.227}$$

Умножив его на $\frac{\sqrt{g_{00}}}{c}$, получим соответствующий интервал собственного времени, так что скорость

$$v^\alpha = \frac{cdx^\alpha}{\sqrt{h}(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)}, \tag{4.228}$$

где мы ввели обозначения

$$g_\alpha = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}, \quad h = g_{00}. \tag{4.229}$$

Для трехмерного вектора $\boldsymbol{g}$ и скаляра g_{00}. Ковариантные компоненты скорости ν как трехмерного вектора в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ и, соответственно, квадрат этого вектора надо понимать как [1]

[1] Интеграл (4.223) тождественно равен нулю, если сумма $g_{\alpha 0}\, dx^\alpha / g_{00}$ является полным дифференциалом какой-либо функции пространственных координат. Такой случай, однако, означал бы просто, что мы имеем в действительности дело со статистическим полем и преобразованием вида $x^0 \to x^0 + f(x^\alpha)$ все $g_{\alpha 0}$ могут быть обращены в нуль.

[1] В дальнейшем мы неоднократно будем вводить в рассмотрение, наряду с 4-векторами и 4-тензорами, также и трехмерные векторы и тензоры, определенные в пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$; таковыми являются, в частности, введенные уже векторы

$$v_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} v^\beta,\ \ v^2 = v_\alpha v^\alpha \ . \tag{4.230}$$

Заметим, что при таком определении интервал ds выражается через скорость формулой, аналогичной обычной формуле:

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0\alpha}\, dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = h(dx^0 - g_\alpha\, dx^\alpha)^2 - dl^2 = h(dx^0 - g_\alpha dx^\alpha)^2 (1 - v^2/c^2)\ . \tag{4.231}$$

Компоненты 4-скорости пробной точки $u^i = dx^i/ds$ равны

$$u^\alpha = \frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad u^0 = \frac{1}{\sqrt{h}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{g_\alpha v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{4.232}$$

Энергия же

$$E_0 = mc^2 g_{0i}\, u^i = m\, c^2 h\, (u^0 - g_\alpha u^\alpha)$$

и после подстановки (4.232) приобретает вид (4.226).

З а д а ч а: определить силу, действующую на пробную точку в постоянном поле 4-деформаций.

Р е ш е н и е [9]: Для нужных нам компонент $\Gamma^i{}_{kl}$ находим следующие выражения:

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = ?\ \ h^{;\alpha};$$

$$\Gamma^\alpha{}_{0\beta} = ?\ \ h\,(g^\alpha{}_{;\beta} - g^{;\alpha}{}_\beta) - ?\ \ g_\beta\, h^{;\alpha}; \tag{4.233}$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha{}_{\beta\gamma} + ?\ \ h\,[g_\beta(g^{;\alpha}{}_\gamma - g^\alpha{}_{;\gamma}) + g_\gamma(g^{;\alpha}{}_\beta - g^\alpha{}_{;\beta})] + ?\ \ g_\beta g_\gamma h^{;\alpha}\ .$$

В этих выражениях все тензорные действия (ковариантные дифференцирования, подъем и опускание индексов) производятся в трехмерном пространстве с метрикой $\gamma_{\alpha\beta}$ над трехмерным вектором g^α и трехмерным скаляром h (4.229); $\lambda^\alpha{}_{\beta\gamma}$ есть трехмерный символ Кристоффеля, составленный из компонент тензора $\gamma_{\alpha\beta}$ так, как $\Gamma^i{}_{kl}$ составляется из компонент g_{ik}; при вычислении использованы формулы (4.227) – (4.229). Подставив (4.233) в уравнение движения (4.218), получим

$$du^\alpha/ds = -\Gamma^\alpha{}_{00}(u^0)^2 - 2\,\Gamma^\alpha{}_{0\beta}\, u^0 u^\beta - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} u^\beta u^\gamma$$

и, используя выражения (4.232) для компонент 4-скорости, после простых преобразований имеем

$$\frac{d}{ds}\frac{v^\alpha}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{h^{;\alpha}}{2h\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\sqrt{h}\,(g^\alpha_{;\beta} - g^{;\alpha}_\beta)v^\beta}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{\lambda^\alpha_{\beta\gamma} v^\beta v^\gamma}{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\,. \tag{4.234}$$

Действующая на частицу сила f есть производная от ее импульса p по (синхронизованному) собственному времени, определенная с помощью трехмерного ковариантного дифференциала:

$$f^\alpha = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{Dp^\alpha}{ds} = c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{d}{ds}\frac{mv^\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \lambda^\alpha_{\beta\gamma}\frac{mv^\beta v^\gamma}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{4.235}$$

---

g и v. В то время как в первом случае тензорные операции (в том числе поднятие и опускание индексов) производятся с помощью метрического тензора g_{ik}, во втором случае - с мощью тензора $\gamma_{\alpha\beta}$. Во избежание могущих возникнуть в связи с этим недоразумений мы будем обозначать трехмерные величины с помощью символов, не используемых для обозначения четырехмерных величин.

Поэтому из (4.235) имеем (для удобства опускаем индекс α):

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-\frac{\partial \ln\sqrt{h}}{\partial x^a} + \sqrt{h}\left(\frac{\partial g_\beta}{\partial x^a} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial x^\beta}\right)\frac{v^\beta}{c}\right\} \tag{4.236}$$

или в обычных трехмерных векторных обозначениях [9]:

$$\vec{f} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left\{-grad\,(\ln\sqrt{h}) + \sqrt{h}\left[\frac{\vec{v}}{c}\times rot\,\vec{g}\right]\right\}. \tag{4.237}$$

Это выражение будет иметь большое значение для дальнейших приложений.