

ГЕОМЕТРИЗИРОВАННАЯ ФИЗИКА ВАКУУМА. ЧАСТЬ II. АЛГЕБРА СИГНАТУР

Михаил Батанов-Гахман¹

(1) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Институт № 2 “Авиационные и ракетные двигатели и энергетические установки”,
ул. Волоколамское шоссе 4, Москва – Россия, 125993
(e-mail: alsignat@yandex.ru)

АННОТАЦИЯ

Данная статья является второй частью научного проекта под общим названием «Геометризированная физика вакуума». На основе Алгебры стигнатур, изложенной в предыдущей статье [1], в этой статье развиваются основные положения Алгебры сигнатур. Обе вышеупомянутые алгебры направлены на исследование свойств идеального вакуума, но вместе с тем они носят универсальный характер и могут быть применены в различных отраслях знания. Показано, что сигнатура квадратичной формы связана с топологией метрического пространства, для которого данная квадратичная форма является метрикой. Приведены условия, при которых аддитивное наложение метрических пространств с различными топологиями (или сигнатурами) приводит к суммарному Риччи плоскому пространству, сходному с многообразием Калаби-Яу. Рассмотрено спин-тензорное представление метрик с различными сигнатурами и представлено дираковское расслоение квадратичных форм. В этой статье отсутствуют физические приложения Алгебры сигнатур, но потенциальная мощь данного математического аппарата будет продемонстрирована в последующих статьях этого проекта.

ABSTRACT

This article is the second part of a scientific project under the general name "Geometrized vacuum physics". On the basis of the Algebra of Stignatures presented in the previous article [1], this article develops the main provisions of the Algebra of Signatures. Both of the above algebras are aimed at studying the properties of an ideal vacuum, but at the same time they are universal and can be applied in various branches of knowledge. It is shown that the signature of a quadratic form is related to the topology of the metric space for which the given quadratic form is a metric. Conditions are given under which an additive imposition of metric spaces with different topologies (or signatures) leads to a total Ricci flat space similar to a Calabi-Yau manifold. A spin-tensor representation of metrics with different signatures is considered and a Dirac bundle of quadratic forms is presented. This article does not contain physical applications of the Algebra of Signatures, but the potential power of this mathematical apparatus will be demonstrated in subsequent articles of this project.

Ключевые слова: вакуум, геометризированная физика вакуума, сигнатура, алгебра сигнатур.

Keywords: vacuum, geometrized vacuum physics, signature, algebra of signature.

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является второй из цикла статей под общим названием «Геометрическая физика вакуума», и посвящена изложению основ Алгебры сигнатур.

В первой статье [1] был рассмотрен локальный объем идеального вакуума, в котором по средством зондирования взаимно перпендикулярными лучами света с длиной волны $\lambda_{m,n}$ (из поддиапазона $\Delta\lambda = 10^m \div 10^n$ см) получена $3D_{m,n}$ кубическая решетка (смотри рис. 1, или рис. 5 в [1]).

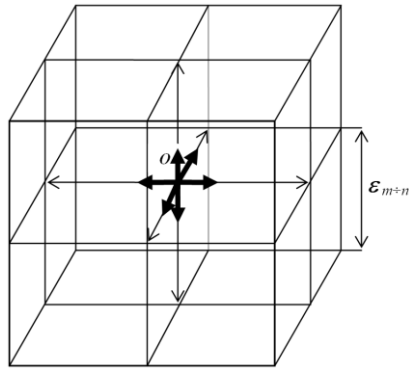


Рис. 1: Неискривленная световая 3D-решетка $\lambda_{m,n}$ -вакуума, выявленная из «вакуума» (пустоты) посредством взаимно перпендикулярных монохроматических лучей света с длиной волны $\lambda_{m,n}$. Ячейками такой решетки являются кубы с длиной ребра $\varepsilon_{m+n} \sim 10^2 \cdot \lambda_{m,n}$

Трехмерная протяженность, выявленная из пустоты с помощью такой световой 3D $_{m,n}$ кубической решетки названа в [1] $\lambda_{m,n}$ -вакуумом или 3D $_{m,n}$ -ландшафтом.

В §3 статьи [1] было выяснено, что количество ортогональных 3-базисов, которые берут начало в центральной точке O (рис. 1) с учетом направления оси времени равно 16-ти

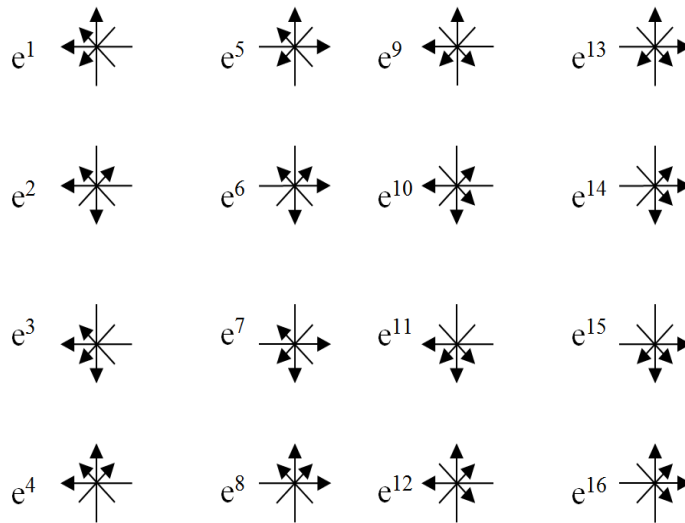


Рис. 2: Шестнадцать 4-базисов с началом в точке O [1]

3-базисы, показанные на рис. 2, соответствуют шестнадцати типам аффинных пространств, которые могут быть охарактеризованы соответствующими сигнатурами (смотрите §4 и таблицу 1 в [1]). Данные шестнадцать сигнатур аффинных пространств образуют матрицу сигнатур (3) в [1]:

$$stign(e_i^{(a)}) = \begin{pmatrix} \{++++\} & \{+++-\} & \{-++-\} & \{+-+ \} \\ \{----\} & \{-+++ \} & \{- - + \} & \{- + - \} \\ \{+--+\} & \{+ + - -\} & \{+ - - -\} & \{+ - + +\} \\ \{- - + -\} & \{+ - + -\} & \{- + - -\} & \{- - - -\} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Некоторые свойства данной матрицы и основы Алгебры сигнатур изложены [1].

В данной статье совершается переход от шестнадцати аффинных пространств со стигнатурами (2), которые берут начало в точке O , к $256 \times 4 = 1024$ метрическим пространствам, которые пересекаются в этой же точке при соблюдении условия «вакуумного баланса».

Условия «вакуумного (т.е. нулевого) баланса» было сформулировано в Введении статьи [1]: «Если из вакуума что-либо рождается, то обязательно во взаимно-противоположном виде (частица – античастица, выпуклость – вогнутость, волна – антиволна и т.д.), и в среднем остается равным нулю».

При этом каждое метрическое пространство характеризуется соответствующей сигнатурой. Совокупность этих сигнатур образует матрицу сигнатур, свойство которой исследуется в данной статье.

Также в этой второй части «Геометризированной физики вакуума» закладываются основы Алгебры сигнатур, которая может быть применена в различных отраслях научного знания.

В совокупности Алгебра стигнатур и Алгебра сигнатур образуют единый универсальный математический аппарат, который может послужить основой для описания и объяснения многих физических и психологических явлений, ранее плохо поддававшихся осмыслению. Приложение этого аппарата к решению различных физических задач будет представлено в следующих статьях предлагаемого проекта.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОД

1 Переход от 16-ти аффинных пространств к 256-ти метрическим пространствам

Перейдем от шестнадцати аффинных пространств с 4-базисами, показанными на рис. 2, и соответствующими им стигнатурами (2) к метрическим пространствам.

Для этого, в качестве примера из шестнадцати 4-базисов (рис. 2) выберем 4-базис $\mathbf{e}_i^{(7)}$ ($\mathbf{e}_0^{(7)}, \mathbf{e}_1^{(7)}, \mathbf{e}_2^{(7)}, \mathbf{e}_3^{(7)}$) со стигнатурой $\{+ + + -\}$ и 4-базис $\mathbf{e}_i^{(5)}$ ($\mathbf{e}_0^{(5)}, \mathbf{e}_1^{(5)}, \mathbf{e}_2^{(5)}, \mathbf{e}_3^{(5)}$) со стигнатурой $\{+ + + +\}$ (рис. 3)

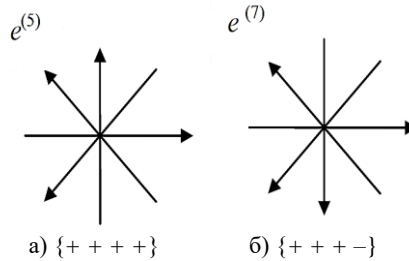


Рис. 3: Два 4-базиса с различными стигнатурами

В аффинных пространствах с 4-базисами $\mathbf{e}_i^{(5)}$ и $\mathbf{e}_i^{(7)}$ зададим по одному 4-вектору

$$ds^{(7)} = \mathbf{e}_i^{(7)} dx_i^{(7)} = \mathbf{e}_0^{(7)} dx_0^{(7)} + \mathbf{e}_1^{(7)} dx_1^{(7)} + \mathbf{e}_2^{(7)} dx_2^{(7)} + \mathbf{e}_3^{(7)} dx_3^{(7)}, \quad (3)$$

$$ds^{(5)} = \mathbf{e}_i^{(5)} dx_i^{(5)} = \mathbf{e}_0^{(5)} dx_0^{(5)} + \mathbf{e}_1^{(5)} dx_1^{(5)} + \mathbf{e}_2^{(5)} dx_2^{(5)} + \mathbf{e}_3^{(5)} dx_3^{(5)}, \quad (4)$$

где $dx_i^{(k)}$ – это i -я проекция 4-вектора $ds^{(k)}$ на ось $x_i^{(k)}$, направление которой определяется базисным вектором $\mathbf{e}_i^{(k)}$.

Найдем скалярное произведение 4-векторов (48) и (49)

$$\begin{aligned} ds^{(5,7)2} &= ds^{(5)} ds^{(7)} = \mathbf{e}_i^{(5)} \mathbf{e}_j^{(7)} dx^i dx^j = \\ &= \mathbf{e}_0^{(5)} \mathbf{e}_0^{(7)} dx_0 dx_0 + \mathbf{e}_1^{(5)} \mathbf{e}_0^{(7)} dx_1 dx_0 + \mathbf{e}_2^{(5)} \mathbf{e}_0^{(7)} dx_2 dx_0 + \mathbf{e}_3^{(5)} \mathbf{e}_0^{(7)} dx_3 dx_0 + \\ &+ \mathbf{e}_0^{(5)} \mathbf{e}_1^{(7)} dx_0 dx_1 + \mathbf{e}_1^{(5)} \mathbf{e}_1^{(7)} dx_1 dx_1 + \mathbf{e}_2^{(5)} \mathbf{e}_1^{(7)} dx_2 dx_1 + \mathbf{e}_3^{(5)} \mathbf{e}_1^{(7)} dx_3 dx_1 + \\ &+ \mathbf{e}_0^{(5)} \mathbf{e}_2^{(7)} dx_0 dx_2 + \mathbf{e}_1^{(5)} \mathbf{e}_2^{(7)} dx_1 dx_2 + \mathbf{e}_2^{(5)} \mathbf{e}_2^{(7)} dx_2 dx_2 + \mathbf{e}_3^{(5)} \mathbf{e}_2^{(7)} dx_3 dx_2 + \\ &+ \mathbf{e}_0^{(5)} \mathbf{e}_3^{(7)} dx_0 dx_3 + \mathbf{e}_1^{(5)} \mathbf{e}_3^{(7)} dx_1 dx_3 + \mathbf{e}_2^{(5)} \mathbf{e}_3^{(7)} dx_2 dx_3 + \mathbf{e}_3^{(5)} \mathbf{e}_3^{(7)} dx_3 dx_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Для рассматриваемого случая, скалярные произведения базисных векторов $\mathbf{e}_i^{(5)}\mathbf{e}_j^{(7)}$ равны:

$$\begin{aligned} \text{при } i=j \quad \mathbf{e}_0^{(5)}\mathbf{e}_0^{(7)}=1, \quad \mathbf{e}_1^{(5)}\mathbf{e}_1^{(7)}=1, \quad \mathbf{e}_2^{(5)}\mathbf{e}_2^{(7)}=1, \quad \mathbf{e}_3^{(5)}\mathbf{e}_3^{(7)}=-1, \\ \text{при } i \neq j \quad \text{все } \mathbf{e}_i^{(5)}\mathbf{e}_j^{(7)}=0. \end{aligned} \quad (6)$$

При этом выражение (5) приобретает вид квадратичной формы

$$ds^{(5,7)2} = dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2, \quad \text{с сигнатурой } (+++ -). \quad (7)$$

Напомним, что «сигнатура» (термин ОТО) – это упорядоченная совокупность знаков, стоящих перед соответствующими слагаемыми квадратичной формы.

Чтобы определить сигнатуру метрического пространства с метрикой (7), вместо выполнения скалярного произведения векторов (5) достаточно по столбцам перемножить знаки стигнатур 4-базисов, показанных на рис. 3:

$$\begin{array}{l} \{ + + + + \} \\ \{ + + + - \} \\ \hline (+ + + -)_\times \end{array} \quad (8)$$

В числителе ранжир (8) выполнено умножение знаков в каждом столбце по правилам

$$\{ + \} \times \{ + \} = \{ + \}; \quad \{ - \} \times \{ + \} = \{ - \}, \quad (9)$$

результат такого перемножения записывается в знаменателе (под чертой) того же столбца. Выполнение действий по данным правилам будем называть ранжирным умножением.

Подобно тому, как это было проделано с векторами $ds^{(5)}$ и $ds^{(7)}$ {смотрите выражения (3) – (9)}, попарно скалярно перемножим между собой вектора из всех 16-ти аффинных пространств с 4-базисами, показанными на рис. 3. В результате получим $16 \times 16 = 256$ метрических 4-пространств с 4-метриками вида

$$ds^{(a,b)2} = \mathbf{e}_i^{(a)}\mathbf{e}_j^{(b)}dx^{i(a)}dx^{j(b)}, \quad (10)$$

где $a = 1, 2, 3, \dots, 16$; $b = 1, 2, 3, \dots, 16$.

Сигнатуры этих $16 \times 16 = 256$ метрических 4-пространств могут быть определены, подобно (8), ранжирными умножениями знаков стигнатур, соответствующих аффинных пространств, например:

$$\begin{array}{cccc} \{ + - + + \} & \{ + + + + \} & \{ - + + + \} & \{ + + + + \} \\ \{ + + + - \} & \{ + - + - \} & \{ + + + - \} & \{ - + + - \} \\ \hline (+ - + -)_\times & (+ - + -)_\times & (- + + -)_\times & (- + + -)_\times \\ \\ \{ + - - + \} & \{ + + - + \} & \{ - + + + \} & \{ + - + - \} \\ \{ + + + - \} & \{ - + + - \} & \{ - + + - \} & \{ + - + - \} \\ \hline (+ - - -)_\times & (- + - -)_\times & (+ + + -)_\times & (+ + + +)_\times \\ \\ \{ + - - - \} & \{ + + - + \} & \{ - + - + \} & \{ + - + + \} \\ \{ + + + - \} & \{ - + - - \} & \{ - - + - \} & \{ + - + - \} \\ \hline (+ - - +)_\times & (- + + -)_\times & (+ - - -)_\times & (+ + + -)_\times \\ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{ + + + - \} & \{ - + - - \} & \{ - + + - \} & \{ + - - + \} \\ \{ - - + - \} & \{ + + + - \} & \{ + - + - \} & \{ - + + - \} \\ \hline (- - + +)_\times & (- - - +)_\times & (- - + -)_\times & (- - - -)_\times \end{array} \quad (11)$$

Точка O (рис. 1) является местом пересечения всех 256 метрических 4-пространств с интервалами (10) и соответствующей сигнатурой (11).

Набор из 256-и метрических 4-пространств (4-карт) образуют единый 256-страничный «атлас» с местом скрепления в точке O , с общим числом математических измерений $256 \times 4 = 1024$.

Сумма всех 256-ти 4-метрик (10), пересекающихся в точке O , равна нулю

$$\sum_{k=1}^{256} ds^{(k)2} = \sum_{a=1}^{16} \sum_{b=1}^{16} e_i^{(a)} e_j^{(b)} dx^{i(a)} dx^{j(b)} = 0, \quad (12)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, 256$ соответствует одной из 256 комбинаций a, b .

В равенстве нулю суммы (12) легко убедиться, так как среди $256 \times 4 = 1024$ знаков всех 256 сигнатур имеется 512 $\{+\}$ и 512 $\{-\}$. Таким образом выражение (12) удовлетворяет условию «вакуумного баланса».

2 Четыре вида правил ранжирного умножения и деления для различных типов $\lambda_{m,n}$ -вакуумов

В рамках Алгебры сигнатур умножение и деление знаков в числителях ранжиров могут выполняться по следующим четырем видам арифметических правил, которые ставятся в соответствие четырем типам метрических $\lambda_{m,n}$ -вакуумов:

I - правила для коммутативного метрического $\lambda_{m,n}$ -вакуума (или $\lambda_{m,n}^I$ -вакуума):

$$\begin{aligned} \{+\} \times \{+\} &= \{+\} & \{-\} \times \{+\} &= \{-\} \\ \{+\} \times \{-\} &= \{-\} & \{-\} \times \{-\} &= \{+\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \{+\} : \{+\} &= \{+\} & \{-\} : \{+\} &= \{-\} \\ \{+\} : \{-\} &= \{-\} & \{-\} : \{-\} &= \{+\}; \end{aligned} \quad (14)$$

II - правила для некоммутативного метрического $\lambda_{m,n}$ -вакуума (или $\lambda_{m,n}^{II}$ -вакуума):

$$\begin{aligned} \{+\} \times \{+\} &= \{+\} & \{-\} \times \{+\} &= \{+\} \\ \{+\} \times \{-\} &= \{-\} & \{-\} \times \{-\} &= \{+\} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \{+\} : \{+\} &= \{+\} & \{-\} : \{+\} &= \{+\} \\ \{+\} : \{-\} &= \{-\} & \{-\} : \{-\} &= \{+\}; \end{aligned} \quad (16)$$

V - правила для коммутативного метрического $\lambda_{m,n}$ -антивакуума (или $\lambda_{m,n}^V$ -вакуума):

$$\begin{aligned} \{+\} \times \{+\} &= \{-\} & \{-\} \times \{+\} &= \{+\} \\ \{+\} \times \{-\} &= \{+\} & \{-\} \times \{-\} &= \{-\} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \{+\} : \{+\} &= \{-\} & \{-\} : \{+\} &= \{+\} \\ \{+\} : \{-\} &= \{+\} & \{-\} : \{-\} &= \{-\}; \end{aligned} \quad (18)$$

II' - правила для некоммутативного метрического $\lambda_{m,n}$ -антивакуума (или $\lambda_{m,n}^{II'}$ -вакуума):

$$\begin{aligned} \{+\} \times \{+\} &= \{-\} & \{-\} \times \{+\} &= \{-\} \\ \{+\} \times \{-\} &= \{+\} & \{-\} \times \{-\} &= \{-\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{+\} : \{+\} &= \{-\} & \{-\} : \{+\} &= \{-\} \\ \{+\} : \{-\} &= \{+\} & \{-\} : \{-\} &= \{-\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для примера, запишем ранжир (8) и несколько других ранжиров из списка (11) для четырех типов $\lambda_{m,n}$ -вакуумов с соответствующими правилами умножения (13), (15), (17), (19)

$$\begin{array}{cccc} \{++++\} & \{++++\} & \{++++\} & \{++++\} \\ \{++++-\} & \{++++-\} & \{++++-\} & \{++++-\} \\ \hline (+ + + -)_{I \times} & (+ + + -)_{H \times} & (- - - +)_{V \times} & (- - - +)_{H \times} \end{array} \quad (21)$$

$$\begin{array}{cccc} \{- + - +\} & \{- + - +\} & \{- + - +\} & \{- + - +\} \\ \{- - + -\} & \{- - + -\} & \{- - + -\} & \{- - + -\} \\ \hline (+ - - -)_{I \times} & (+ - - -)_{H \times} & (- + + +)_{V \times} & (- + + +)_{H \times} \end{array} \quad (22)$$

$$\begin{array}{cccc} \{- + - -\} & \{- + - -\} & \{- + - -\} & \{- + - -\} \\ \{- + + -\} & \{- + + -\} & \{- + + -\} & \{- + + -\} \\ \hline (+ + - +)_{I \times} & (+ + + +)_{H \times} & (- - + -)_{V \times} & (- - - -)_{H \times} \end{array} \quad (23)$$

$$\begin{array}{cccc} \{+ + - +\} & \{+ + - +\} & \{+ + - +\} & \{+ + - +\} \\ \{- - + +\} & \{- - + +\} & \{- - + +\} & \{- - + +\} \\ \hline (- - - +)_{I \times} & (- - + +)_{H \times} & (+ + + -)_{V \times} & (+ + - -)_{H \times} \end{array} \quad (24)$$

При этом сумма знаков в знаменателях каждой четверики ранжиров (21) – (24) равна нулю, например, для четырех ранжиров (21) имеем

$$(+ + + -) + (+ + + -) + (- - - +) + (- - - +) = 0, \quad (25)$$

а сумма данных сигнатур равна нулевой сигнатуре

$$(+ + + -) + (+ + + -) + (- - - +) + (- - - +) = (0 0 0 0). \quad (26)$$

Это соответствует условию «вакуумного баланса».

С учетом четырех правил умножения знаков (13), (15), (17), (19) получается, что в исследуемой точке O (рис. 1) пересекаются четыре $\lambda^L_{m,n}$ -вакуума или $256 \times 4 = 1024$ метрических пространств, которые характеризуются метриками (т.е. квадратичными формами) $ds^{(l)2}$ с соответствующими сигнатурами.

Сумма всех четырех метрических $\lambda^L_{m,n}$ -вакуумов и соответственно сумма всех 1024 метрик $ds^{(l)2}$ по-прежнему остается равной нулю

$$\lambda^I_{m,n}\text{-вакуум} + \lambda^H_{m,n}\text{-вакуум} + \lambda^V_{m,n}\text{-вакуум} + \lambda^H_{m,n}\text{-вакуум} = 0, \quad (27)$$

$$\sum_{l=1}^{1024} ds^{(k)2} = 0, \quad (28)$$

что удовлетворяет требованию соблюдения «вакуумного баланса». Сумму метрических $\lambda^L_{m,n}$ -вакуумов (27) {или квадратичных форм (28)} будем еще называть «глубоким нулем».

Метрические $\lambda^L_{m,n}$ -вакуумы (27) являются «опорами» друг для друга и обеспечивают полную балансировку метрической пустоты. В дальнейшем каждому метрическому $\lambda^L_{m,n}$ -вакууму будет поставлен в соответствие специфический факториал нуля, соответствующий одному из правил умножения (13), (15), (17), (19):

$$0_I! = 1, \quad 0_H! = -1, \quad 0_V! = i, \quad 0_H! = -i. \quad (29)$$

так, что сумма данных факториалов соответствует «истинному нулю»

$$0_I! + 0_H! + 0_V! + 0_H! = 1 + (-1) + i + (-i) = 0. \quad (30)$$

Тождественность «глубокого нуля» и «истинного нуля» приведет к замкнутой завершенности развиваемой теории.

3 Матрица сигнатур

Как было показано выше, скалярное перемножения шестнадцати 4-базисов, показанных на рис. 2, друг с другом привело к формированию атласа из $16 \times 16 = 256$ метрических пространств с метриками (10) $ds^{(ab)^2} = \mathbf{e}_i^{(a)} \mathbf{e}_j^{(b)} dx^{i(a)} dx^{j(b)}$ с соответствующими сигнатурами. Однако различных сигнатур только 16, так как имеет место 16-кратная вырожденность. Например, 16 скалярных произведений 4-базисов, показанных на рис. 4, приводят к получению шестнадцати квадратичных форм (т.е. метрик) с одинаковой сигнатурой $(-+-+)$.

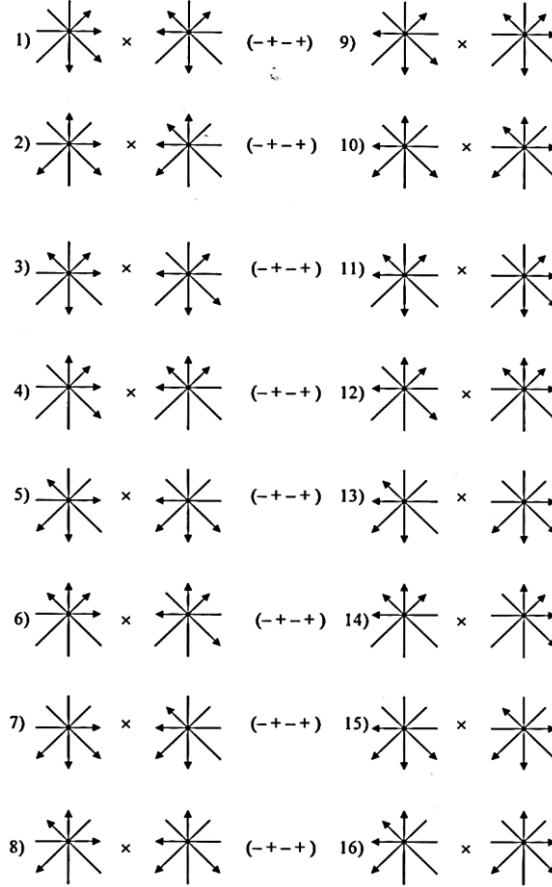


Рис. 4. Шестнадцать скалярных произведений 4-базисов, приводящих к метрикам с одинаковой сигнатурой $(-+-+)$

Аналогично получается 16-кратная вырожденность со всеми остальными метрическими пространствами. Таким образом, можно выделить всего $256/16 = 16$ типов метрических 4-пространств с квадратичными формами (т.е. метриками)

$$\begin{aligned}
 ds^{(++++)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(----)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \\
 ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(+++-)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
 ds^{(--+)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(-++-)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
 ds^{(+-+)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(-+++)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(+++-)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(--+)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(+--+)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(+-+)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(-+-+)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(+-+)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2
 \end{aligned} \tag{31}$$

с соответствующими сигнатурами, образующими матрицу

$$\text{stign}(ds^{(a,b)2}) = \begin{pmatrix} (+ + + +) & (+ + + -) & (- + + -) & (+ + - +) \\ (- - - +) & (- + + +) & (- - + +) & (- + - +) \\ (+ - - +) & (+ + - -) & (+ - - -) & (+ - + +) \\ (- - + -) & (+ - + -) & (- + - -) & (- - - -) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Элементы матрицы сигнатур (32) полностью совпадает с элементами матрицы стигнатур (2) {или (3) в статье [1]}. Поэтому свойства матрицы сигнатур (32) во многом повторяют свойства матрицы стигнатур (смотрите [1]) на следующем ветке развития теории.

4 Связь между сигнатурой и топологией 4-пространства

По классификации Феликса Клейна [3] метрические пространства с метриками (31) могут быть разделены на три топологических типа:

1-й тип: 4-пространства, сигнатуры которых состоят из четырех одинаковых знаков [3]:

$$\begin{aligned} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 & (+ + + +) \\ -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 & (- - - -) \end{aligned} \quad (33)$$

– это так называемые нулевые метрические 4-пространства. У этих «пространств» имеется только одна действительная точка, находящаяся в начале светового конуса. Все остальные точки этих протяженностей являются мнимыми. По сути, первое из выражений (33) описывает не «протяженность», а единственную точку (или «белую» точку), а второе – единственную антиточку (или «черную» точку).

2-й тип: 4-пространства, сигнатуры которых состоят из двух положительных и двух отрицательных знаков [3]:

$$\begin{aligned} x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 & (+ - - +) \\ x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 & (+ + - -) \\ x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 & (+ - + -) \\ -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 & (- + + -) \\ -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 & (- - + +) \\ -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 & (- + - +) \end{aligned} \quad (34)$$

– это различные варианты 4-мерных торов.

3-й тип: 4-пространства, сигнатуры которых состоят из трех одинаковых знаков и одного противоположного [3]:

$$\begin{aligned} -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 & (- - - +) \\ -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 & (- - + -) \\ -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 & (- + - -) \\ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 & (+ - - -) \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 & (+ + + -) \\ x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 & (+ + - +) \\ x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 & (+ - + +) \\ -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 & (- + + +) \end{aligned} \quad (35)$$

– это овалыные 4-поверхности: эллипсоиды, эллиптические параболоиды, двуполостные гиперболоиды.

Упрощенная иллюстрация связи сигнатуры 2-мерного пространства с его топологией показана на рис. 5. Из этого рисунка видно, что сигнатура квадратичной формы однозначно связана с топологией 2-мерной протяженности. Но не наоборот, топология протяженности значительно более емкое понятие, чем сигнатура ее метрики.

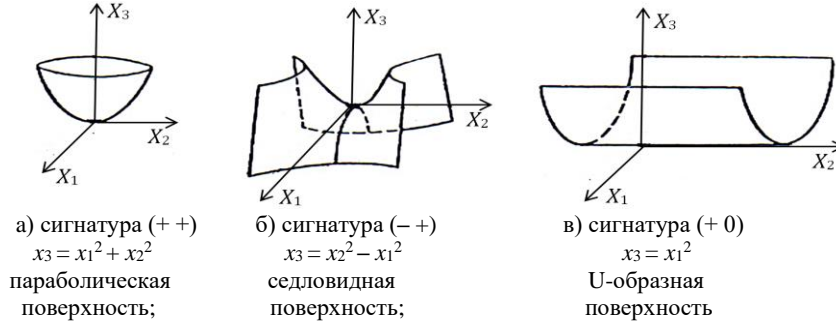


Рис. 5. Иллюстрация связи сигнатуры 2-мерного пространства с его топологией [3]

5 Расщепление метрического нуля

Сумма всех 16 метрик (31) равна нулю:

$$\begin{aligned}
 ds_2^2 = & ds^{(---)2} + ds^{(+++)2} + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} + \\
 & + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} + \\
 & + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} + \\
 & + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} + ds^{(---)2} = 0.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Действительно, складывая метрики (31), получим

$$\begin{aligned}
 ds_2^2 = & (dx_0dx_0 - dx_1dx_1 - dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + dx_3dx_3) + \\
 & + (-dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (dx_0dx_0 - dx_1dx_1 - dx_2dx_2 + dx_3dx_3) + \\
 & + (-dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (dx_0dx_0 + dx_1dx_1 - dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + \\
 & + (-dx_0dx_0 + dx_1dx_1 - dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + \\
 & + (-dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + dx_3dx_3) + (-dx_0dx_0 - dx_1dx_1 - dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + \\
 & + (dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (-dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + \\
 & + (dx_0dx_0 + dx_1dx_1 - dx_2dx_2 + dx_3dx_3) + (-dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + dx_3dx_3) + \\
 & + (dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + dx_3dx_3) + (-dx_0dx_0 + dx_1dx_1 - dx_2dx_2 + dx_3dx_3) = 0.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Вместо суммирования однородных слагаемых в выражении (37) можно суммировать только знаки, стоящие перед этими слагаемыми. Поэтому суммарную метрику (37) представим виде в ранжирного выражения:

$$\begin{aligned}
 0 = & \underline{(0 \ 0 \ 0 \ 0)} + \underline{(0 \ 0 \ 0 \ 0)} = 0 \\
 0 = & (+ \ + \ + \ +) + (- \ - \ - \ -) = 0 \\
 0 = & (- \ - \ - \ +) + (+ \ + \ + \ -) = 0 \\
 0 = & (+ \ - \ - \ +) + (- \ + \ + \ -) = 0 \\
 0 = & (- \ - \ + \ -) + (+ \ + \ - \ +) = 0 \\
 0 = & (+ \ + \ - \ -) + (- \ - \ + \ +) = 0 \\
 0 = & (- \ + \ - \ -) + (+ \ - \ + \ +) = 0 \\
 0 = & (+ \ - \ + \ -) + (- \ + \ - \ +) = 0 \\
 0 = & \underline{(- \ + \ + \ +)} + \underline{(+ \ - \ - \ -)} = 0 \\
 0 = & (0 \ 0 \ 0 \ 0)_+ + (0 \ 0 \ 0 \ 0)_+ = 0,
 \end{aligned} \tag{38}$$

где суммирование (или вычитание) знаков производится по правилам:

$$\begin{aligned}
 (+) + (+) &= 2(+), & (-) + (+) &= (0), & (+) - (+) &= (0), & (-) - (+) &= 2(-), & (39) \\
 (+) + (-) &= (0), & (-) + (-) &= 2(-), & (+) - (-) &= 2(+), & (-) - (-) &= (0).
 \end{aligned}$$

Сумма знаков, как по столбцам ранжиров (38), так и по их строкам между ранжирами, равна нулю. Поэтому данное ранжирное тождество будем называть «расщеплением метрического нуля».

6 Операции с ранжирами

Ранжирное выражение (38) позволяет проделывать в окрестности исследуемой точки O (рис. 1) некоторые операции без нарушения «вакуумного баланса». К таким операциям относится, например, симметричный перенос первого и последнего столбцов на другую сторону равенства с инвертированием знаков, при соблюдении построчного и порядного вакуумного баланса:

$$\begin{aligned}
 0 &= \underline{(0 \ 0 \ 0)} + \underline{(0 \ 0 \ 0)} = 0 & (40) \\
 - &= (+ \ + \ +) + (- \ - \ -) = + \rightarrow 0 \\
 + &= (- \ - \ +) + (+ \ + \ -) = - \rightarrow 0 \\
 - &= (- \ - \ +) + (+ \ + \ -) = + \rightarrow 0 \\
 + &= (- \ + \ -) + (+ \ - \ +) = - \rightarrow 0 \\
 - &= (+ \ - \ -) + (- \ + \ +) = + \rightarrow 0 \\
 + &= (+ \ - \ -) + (- \ + \ +) = - \rightarrow 0 \\
 - &= (- \ + \ -) + (+ \ - \ +) = + \rightarrow 0 \\
 + &= \underline{(+ \ + \ +)} + \underline{(- \ - \ -)} = - \rightarrow 0 \\
 0 &= (0 \ 0 \ 0)_+ + (0 \ 0 \ 0)_+ = 0.
 \end{aligned}$$

Аналогично могут быть симметрично перенесены на другую сторону любые столбцы ранжирного выражения (38)

Возможен перенос любой строки из числителей ранжиров (38) в их знаменатели, так же с инвертированием знаков, и соблюдением построчного вакуумного баланса например:

$$\begin{aligned}
 0 &= (+ \ + \ + \ +) + (- \ - \ - \ -) = 0 & (41) \\
 0 &= (- \ - \ - \ +) + (+ \ + \ + \ -) = 0 \\
 0 &= (+ \ - \ - \ +) + (- \ + \ + \ -) = 0 \\
 0 &= (+ \ + \ - \ -) + (- \ - \ + \ +) = 0 \\
 0 &= (- \ + \ - \ -) + (+ \ - \ + \ +) = 0 \\
 0 &= (+ \ - \ + \ -) + (- \ + \ - \ +) = 0 \\
 0 &= \underline{(- \ + \ + \ +)} + \underline{(+ \ - \ - \ -)} = 0 \\
 0 &= (+ \ + \ - \ +)_+ + (- \ - \ + \ -)_+ = 0.
 \end{aligned}$$

Также возможны смешанные операции переноса строк и столбцов, не нарушающих условия построчного вакуумного баланса, например

$$\begin{aligned}
 - &= (+ \ + \ +) + (- \ - \ -) = + \rightarrow 0 & (42) \\
 - &= (- \ - \ -) + (+ \ + \ +) = + \rightarrow 0 \\
 - &= (+ \ - \ -) + (- \ + \ +) = + \rightarrow 0 \\
 + &= (+ \ + \ -) + (- \ - \ +) = - \rightarrow 0 \\
 + &= (- \ + \ -) + (+ \ - \ +) = - \rightarrow 0 \\
 + &= (+ \ - \ +) + (- \ + \ -) = - \rightarrow 0 \\
 - &= \underline{(- \ + \ +)} + \underline{(+ \ - \ -)} = + \rightarrow 0 \\
 - &= (+ \ + \ -)_+ + (- \ - \ +)_+ = + \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Подобные ранжирные операции соответствуют определенным вакуумным симметриям, которые будут рассмотрены в следующих статьях предлагаемого проекта.

7 Двустороннее метрическое пространство

Перенесем сигнатуры $(-+++)$ и $(+---)$ из числителей ранжиров (38) в их знаменатели

(43)

$$\begin{aligned}
 (+ + + +) + (- - - -) &= 0 \\
 (- - - +) + (+ + + -) &= 0 \\
 (+ - - +) + (- + + -) &= 0 \\
 (- - + -) + (+ + - +) &= 0 \\
 (+ + - -) + (- - + +) &= 0 \\
 (- + - -) + (+ - + +) &= 0 \\
 \frac{(+ - + -)}{(+ - - -)_+} + \frac{(- + - +)}{(- + + +)_+} &= 0 \\
 \frac{(+ - - -)_+}{(+ - - -)_+} + \frac{(- + + +)_+}{(- + + +)_+} &= 0 .
 \end{aligned}$$

В развернутом виде ранжиры (43) имеют следующий вид

(44)

$$\begin{aligned}
 ds^{(++++)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(----)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \\
 ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(+++)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
 ds^{(--+)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(---)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
 ds^{(-++)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(++++)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(+-+)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(---+)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(+--)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(---)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
 \frac{ds^{(+-+)^2}}{ds^{(---)^2}} &= \frac{dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2}{dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2} & \frac{ds^{(---+)^2}}{ds^{(++++)^2}} &= \frac{-dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2}
 \end{aligned}$$

Ранжирное выражение (44) эквивалентно тому, что сложение (т.е. аддитивное наложение) 7-ми метрических пространств с сигнатурами (топологиями), указанными в числителе левого ранжира (43), образуют метрическое 4-пространство Минковского с метрикой

$$ds^{(---)^2} = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \text{ с сигнатурой } (+---), \quad (45)$$

$$\text{где } ds^{(---)^2} = ds^{(++++)^2} + ds^{(---+)^2} + ds^{(--+)^2} + ds^{(---)^2} + ds^{(+++)^2} + ds^{(---)^2} + ds^{(---)^2},$$

данное 4-пространство Минковского будем условно называть *внешней стороной* $\lambda_{m,n}$ -вакуума (или *субконтом* – сокращение от «субстанциональный континуум»).

При этом аддитивное наложение 7-ми метрических пространств с сигнатурами, указанными в числителе правого ранжира (43), образуют метрическое 4-антипространство Минковского с метрикой

$$ds^{(++++)^2} = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \text{ с сигнатурой } (-++++), \quad (46)$$

$$\text{где } ds^{(++++)^2} = ds^{(----)^2} + ds^{(+++)^2} + ds^{(---+)^2} + ds^{(--+)^2} + ds^{(---)^2} + ds^{(---)^2} + ds^{(---)^2}. \quad (47)$$

Данное метрическое 4-антипространство Минковского будем условно называть *внутренней стороной* $\lambda_{m,n}$ -вакуума (или *антисубконтом* – сокращение от «антисубстанциональный континуум»).



Понятия «субконт» и «антисубконт» – это ментальные конструкции, которые предназначены только для того, чтобы создать иллюзию «видимости» двух смежных взаимно-противоположных сторон одного $\lambda_{m,n}$ -вакуума. Если одну сторону листа бумаги покрасить в синий цвет, а другую сторону того же листа покрасить в красный цвет, то синюю сторону листа можно ассоциировать с «субконт», а его красную сторону – с «антисубконт». Понятия «субконт» и «антисубконт» вводятся только для того, чтобы облегчить визуализацию внутри-вакуумных процессов, но никакого отношения к реальности они не имеют. Однако, как будет показано в следующих статьях данного проекта, оперируя этими ментальными понятиями можно инспирировать реальные вакуумные эффекты.

Операция, описываемая ранжирным выражением (43), позволяет ментально «выявить» из пустоты двухсторонний $\lambda_{m,n}$ -вакуум с числом математических измерений $4 + 4 = 8 = 2^3$. Такое двухсторонне 8-мерное пространство предлагаем называть 2^3 - $\lambda_{m,n}$ -вакуумом при условии сохранения 2^3 - $\lambda_{m,n}$ -вакуумного баланса

$$ds^{(+---)^2} + ds^{(-++)^2} = 0, \quad (48)$$

с ранжирным эквивалентом $(+---) + (-++) = (0\ 0\ 0\ 0)$, или в транспонированном виде

$$\begin{array}{c} (+---) \\ (-++) \\ (0\ 0\ 0\ 0)_+ \end{array} \quad (49)$$

В предложенной здесь терминологии ранжирное выражение (38) эквивалентно условию баланса 2^6 - $\lambda_{m,n}$ -вакуума с 16-ю 4-мерными сторонами (или гранями), поскольку число математических измерений такой 16-гранной протяженности

$$4 \times 16 = 64 = 2^6. \quad (50)$$

Философское осмысление ранжирного выражения (38) может привести к корням религиозных и мифологических традиций, где число 7 имеет сакральное значение «Семи небес», а две взаимно противоположные стороны 2^3 - $\lambda_{m,n}$ -вакуума соответствует восприятию реальности через логику восходящую к гегельянской диалектике.

Здесь впервые математические (умозрительные) выкладки Алгебры сигнатур привели к следующему очень важному практическому выводу. Условие вакуумного баланса привело к необходимости считать, что окружающая нас пустая протяженность имеет не менее 16-ти 4-мерных «граней» с сигнатурами (32). При этом в ряде задач число граней такой пустой протяженности можно понизить до двух с сигнатурами $(+---)$ и $(-++)$, а в ряде других задач повысить до бесконечности (смотрите § 9).

Другими словами, необходимо осознать, что окружающее нас пространство имеет как минимум две стороны: «внешнюю» и «внутреннюю», которые условно можно назвать «субконт» и «антисубконт». Это потребует полного просмотра нашего умозрительного отношения к реальности, но как выяснится ниже, односторонние теории неминуемо приводят к неразрешимым парадоксам, а 16-гранные (или как минимум двухсторонние) теории позволяют значительно расширить круг решаемых задач.

Напомним, что в общей теории относительности (ОТО) А. Эйнштейна имеет место только одно метрическое 4-пространство с сигнатурой, например, $(+---)$. Тогда как в развиваемой здесь геометризированной физике вакуума, базирующейся на Алгебре сигнатур, у любого $\lambda_{m,n}$ -вакуума может быть минимум две стороны (т.е. взаимно противоположные метрические 4-пространства): *внешняя* сторона (или *субконт*) с сигнатурами $(+---)$ и *внутренняя* сторона (или *антисубконт*) с сигнатурой $(-++)$.

8 Бинарные триады

Не только ранжирное выражение (38) приводит к антиподной диаде: «4-пространство – 4-антипространство» Минковского с сигнатурами (+ ---) и (- + +). К данной диаде приводят и следующие ранжирные выражения:

$$\begin{aligned}
 (- - - +) + (+ + + -) &= 0 \\
 (+ - + -) + (- + - +) &= 0 \\
 \underline{(+ + - -)} + \underline{(- - + +)} &= 0 \\
 (+ - - -)_+ + (- + + +)_+ &= 0
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
 (- - + -) + (+ + - +) &= 0 \\
 (+ + - -) + (- - + +) &= 0 \\
 \underline{(+ - - +)} + \underline{(- + + -)} &= 0 \\
 (+ - - -)_+ + (- + + +)_+ &= 0
 \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
 (- - + -) + (+ + - +) &= 0 \\
 (+ + - -) + (- - + +) &= 0 \\
 \underline{(+ - - +)} + \underline{(- + + -)} &= 0 \\
 (+ - - -)_+ + (- + + +)_+ &= 0
 \end{aligned} \tag{53}$$

Эти ранжирные выражения (*бинарные триады*) также удовлетворяют условию вакуумного баланса и играют большую роль в «вакуумной хромодинاميке», которая будет изложена в следующих статьях этого проекта.

9 Поперечное расслоение $\lambda_{m,n}$ -вакуума

Подобно ранжирному выражению (41) и (43) любая пара метрических 4-пространств с взаимно противоположными сигнатурами может быть представлена в виде суммы $7 + 7 = 14$ метрических протяженностей с другими сигнатурами.

Например, сопряженная пара метрик $ds^{(- + + -)^2}$ и $ds^{(+ - - +)^2}$ с взаимно противоположными сигнатурами (- + + -) и (+ - - +) может быть выражена суммированием (т.е. аддитивным наложением) $7 + 7 = 14$ метрических 4-пространств с сигнатурами

$$\begin{aligned}
 -(+ + + +) + (- - - -) &= 0 \\
 (- - - +) + (+ + + -) &= 0 \\
 (- - + -) + (+ + - +) &= 0 \\
 (+ + - -) + (- - + +) &= 0 \\
 (- + - -) + (+ - + +) &= 0 \\
 (+ - + -) + (- + - +) &= 0 \\
 \underline{(- + + +)} + \underline{(+ - - -)} &= 0 \\
 (- + + -)_+ + (+ - - +)_+ &= 0.
 \end{aligned} \tag{54}$$

Аналогично, из 256 метрик с сигнатурами (11) можно выделить $256 : 2 = 128$ сопряженных пар метрик, каждая из которых может быть выражена через аддитивное наложение $7 + 7 = 14$ -ти метрических 4-подпространств с соответствующими сигнатурами при соблюдении вакуумного баланса.

В свою очередь, сопряженные пары 4-подпространств могут быть точно так же разложены еще на суммы $7 + 7 = 14$ под-подпространств, и так может продолжаться до бесконечности.

Получается сбалансированная относительно нуля свето-геометрия пустоты, в которой «вакуум» сначала представляется в виде бесконечного количества вложенных друг в друга $\lambda_{m,n}$ -вакуумов (смотрите § 1 и рис. 2 в статье [1]). Такое представление пустоты названо продольным расслоением «вакуума». Затем каждый $\lambda_{m,n}$ -вакуум расщепляется на

бесконечное количество метрических 4-подпространств, 4-под-подпространств и т.д. с 16-ю типами сигнатур (или топологий, смотрите § 4) без нарушения вакуумного баланса. Такое бесконечное расщепление каждого $\lambda_{m,n}$ -вакуума будем называть *поперечным расслоением* «вакуума».

Продольное и поперечное расслоение «вакуума» приводит к тому, что в каждой точке пустоты (в том числе и в исследуемой точке O , смотрите рис. 1) происходит аддитивное наложение бесконечного количества метрических 4-пространств с 16-ю типами сигнатур (т.е. топологий, среди которых 6 типов торов (34) и 8 типов овальных поверхностей (35)), которые полностью компенсируют проявления друг друга (т.е. соблюдается условие «вакуумного баланса»). Это приводит к формированию нулевого Риччи-плоского пространства, которое во многом схоже с компактным многообразием Калаби-Яу (т.е. многомерным комплексным тором) (рис. 6).

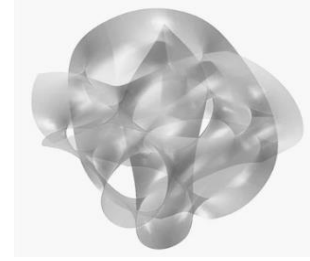


Рис. 6: Одна из реализаций двухмерной проекции трехмерной визуализации локального участка 10-мерного многообразия Калаби-Яу [8]

10 Спинтензорное представление метрик с различными сигнатурами

Рассмотрим метрику

$$ds^{(+---)^2} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \text{ с сигнатурой } (+---). \quad (55)$$

Для краткости опустим в метрике (55) знаки дифференциалов

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \quad (56)$$

Как известно, квадратичная форма (56) является детерминантом эрмитовой 2×2 -матрицы

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}_{det} = \begin{vmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \text{ с сигнатурой } (+---). \quad (57)$$

В том, что данная матрица является эрмитовой, легко убедиться прямым вычислением

$$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (58)$$

В теории спиноров матрицы вида (58) называют смешанными эрмитовыми спинтензорами второго ранга [6].

Представим 2×2 -матрицу (58) в развернутом виде

$$A_4 = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$\text{где } \sigma_0^{(+---)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(+---)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– набор матриц Паули.

В теории спиноров A_4 -матрицам вида (59) ставятся в однозначное соответствие кватернионы типа

$$q = x_0 + \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3, \quad (59)$$

при изоморфизме

$$\vec{e}_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (60)$$

Аналогично, каждая квадратичная форма с соответствующей сигнатурой (32):

$$\begin{aligned}
 ds^{(++++)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(----)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \\
 ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(++++)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
 ds^{(--+)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
 ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(++++)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(--+)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(++++)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(--+)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(---+)^2} &= dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
 ds^{(---+)^2} &= dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(---+)^2} &= -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2
 \end{aligned} \tag{61}$$

может быть представлена в виде спинтензора или A_4 -матрицы, которые показаны в табл. 1:

Таблица 1: Спинтензоры и A_4 -матрицы с различными сигнатурами

1	$ \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(++++) $ $ \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; $ $ \text{зде} $ $ \sigma_0^{(++++)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(++++)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(++++)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(++++)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. $
2	$ \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(++++-) $ $ \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; $ $ \text{зде} $ $ \sigma_0^{(++++-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(++++-)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(++++-)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(++++-)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. $
3	$ \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & -x_0 + ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(-++-) $ $ \begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & -x_0 + ix_3 \end{pmatrix} = -x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; $ $ \text{зде} $ $ \sigma_0^{(-++-)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(-++-)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(-++-)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(-++-)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. $

4	$\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(++-+)$ $\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ <p style="text-align: center;"><i>зде</i></p> $\sigma_0^{(++-+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(++-+)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(++-+)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(++-+)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$
5	$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & ix_1 + x_2 \\ -ix_1 + x_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(----+)$ $\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & ix_1 + x_2 \\ -ix_1 + x_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} = -x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ <p style="text-align: center;"><i>зде</i></p> $\sigma_0^{(----+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(----+)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(----+)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(----+)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$
6	$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(-++++)$ $\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & ix_1 + x_2 \\ ix_1 - x_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} = -x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ <p style="text-align: center;"><i>зде</i></p> $\sigma_0^{(-++++)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(-++++)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(-++++)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(-++++)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ <p style="text-align: center;">- это матрицы Кэли.</p>
7	$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(--++)$ $\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} = -x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ <p style="text-align: center;"><i>зде</i></p> $\sigma_0^{(--++)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(--++)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(--++)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(--++)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

8	$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(-+++) $ $\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & -x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & -x_0 + x_3 \end{pmatrix} = -x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ <p><i>zde</i></p> $\sigma_0^{(-++-)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(-++-)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(-++-)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(-++-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
9	$\begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(+---) $ $\begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix};$ <p><i>zde</i></p> $\sigma_0^{(+---)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(+---)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$
10	$\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(++--) $ $\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$ <p><i>zde</i></p> $\sigma_0^{(++--)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(++--)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(++--)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(++--)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$
11	$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}_{\det} = \begin{vmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(+----) $ $\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ <p><i>zde</i></p> $\sigma_0^{(+----)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(+----)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(+----)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(+----)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

12	$\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(+ - + +)$ $\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ $z\partial e$ $\sigma_0^{(+ - + +)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(+ - + +)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(+ - + +)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(+ - + +)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$
13	$\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(- - + -)$ $\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix} = -x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ $z\partial e$ $\sigma_0^{(- - + -)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(- - + -)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(- - + -)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(- - + -)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$
14	$\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(+ - + -)$ $\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$ $z\partial e$ $\sigma_0^{(+ - + -)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(+ - + -)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(+ - + -)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(+ - + -)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$
15	$\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(- + - -)$ $\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix} = -x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ $z\partial e$ $\sigma_0^{(- + - -)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(- + - -)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(- + - -)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(- + - -)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$
16	$\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad \text{sign}(- - - -)$ $\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix} = -x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ $z\partial e$ $\sigma_0^{(- - - -)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(- - - -)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(- - - -)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(- - - -)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$

Каждой A_4 -матрице из табл. 1 ставится в соответствие «цветной» кватернион с соответствующей стигатурой, где в качестве мнимых единиц используются объекты

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \rightarrow \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \vec{e}_2 \rightarrow \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \vec{e}_3 \rightarrow \sigma_3 &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & \vec{e}_4 \rightarrow \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
\vec{e}_5 \rightarrow \sigma_5 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \vec{e}_6 \rightarrow \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \vec{e}_7 \rightarrow \sigma_7 &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & \vec{e}_8 \rightarrow \sigma_8 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
\vec{e}_9 \rightarrow \sigma_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \vec{e}_{10} \rightarrow \sigma_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \vec{e}_{11} \rightarrow \sigma_{11} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & \vec{e}_{12} \rightarrow \sigma_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
\vec{e}_{13} \rightarrow \sigma_{13} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \vec{e}_{14} \rightarrow \sigma_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \vec{e}_{15} \rightarrow \sigma_{15} &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & \vec{e}_{16} \rightarrow \sigma_{16} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{62}$$

где σ_j спиновые матрицы Паули-Кэли, которые являются образующими алгебры Клиффорда, и удовлетворяют условиям

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ при } i \neq j; \\ 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } i = j. \end{cases} \tag{63}$$

В табл. 1 приведены только частные случаи спинтензорных представлений квадратичных форм. Например, квадратичная форма $s^{(+---)^2} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ является детерминантом всех нижеприведенных 2×2 -матриц (эрмитовых спинтензоров):

(64)

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_1 - x_2 & -x_0 + x_3 \\ x_0 + x_3 & ix_1 + x_2 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_3 + ix_2 \\ x_3 - ix_2 & x_0 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & x_3 - ix_2 \\ x_3 + ix_2 & x_0 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_3 - ix_2 \\ x_3 + ix_2 & x_0 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & x_3 + ix_2 \\ x_3 - ix_2 & x_0 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_2 - x_1 & -x_0 + x_3 \\ x_0 + x_3 & ix_2 + x_1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} x_0 + x_2 & x_1 + ix_3 \\ x_1 - ix_3 & x_0 - x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_1 - ix_3 \\ x_1 + ix_3 & x_0 + x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_2 & x_1 - ix_3 \\ x_1 + ix_3 & x_0 - x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_1 + ix_3 \\ x_1 - ix_3 & x_0 + x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_1 - x_3 & -x_0 + x_2 \\ x_0 + x_2 & ix_1 + x_3 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_2 + ix_1 \\ x_2 - ix_1 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_2 + ix_1 \\ x_2 - ix_1 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_3 - x_2 & -x_0 + x_1 \\ x_0 + x_1 & ix_3 + x_2 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_1 & x_2 - ix_3 \\ x_2 + ix_3 & x_0 - x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_1 & x_2 + ix_3 \\ x_2 - ix_3 & x_0 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_2 - x_3 & -x_0 + x_1 \\ x_0 + x_1 & ix_2 + x_3 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} x_0 + x_2 & x_3 + ix_1 \\ x_3 - ix_1 & x_0 - x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_3 - ix_1 \\ x_3 + ix_1 & x_0 + x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_2 & x_3 - ix_1 \\ x_3 + ix_1 & x_0 - x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - x_2 & x_3 + ix_1 \\ x_3 - ix_1 & x_0 + x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_3 - x_1 & -x_0 + x_2 \\ x_0 + x_2 & ix_3 + x_1 \end{pmatrix} \\
&\begin{pmatrix} ix_2 - x_1 & -x_0 + x_3 \\ x_0 + x_3 & ix_2 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_2 - x_1 & x_0 + x_3 \\ -x_0 + x_3 & ix_2 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_1 - x_3 & x_0 + x_2 \\ -x_0 + x_2 & ix_1 + x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_2 - x_3 & x_0 + x_1 \\ -x_0 + x_1 & ix_2 + x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_3 - x_1 & x_0 + x_2 \\ -x_0 + x_2 & ix_3 + x_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Так же разветвляются (вырождаются) спинтензорные представления всех 16-и квадратичных форм, приведенных в табл. 1. В ряде случаев, дискретная вырожденность (т. е. скрытая многозначность) исходного идеального состояния $\lambda_{m,n}$ -вакуума при отклонении от идеальности, может привести к расщеплению (квантованию) на дискретное множество неодинаковых состояний его поперечных слоев.

Шестнадцать типов A_4 -матриц эквивалентны 16-ти «цветным» кватернионам (смотрите п. 5.9 в [1]). Для наглядности все типы A_4 -матриц и все сорта «цветных» кватернионов сведены в табл. 2.

Таблица 2: Квадратичные формы, A_4 -матрицы и «цветные» кватернионы

Квадратичная форма	A_4 -матрица	«Цветной» кватернион	Стигнатура
$ds_1^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$z_1 = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$	{+ + + +}
$ds_2^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$	$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$	$z_2 = x_0 - ix_1 - jx_2 + kx_3$	{+ - - +}
$ds_3^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$z_3 = x_0 + ix_1 + jx_2 - kx_3$	{+ + + -}
$ds_4^2 = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$z_4 = x_0 + ix_1 - jx_2 - kx_3$	{+ + - -}
$ds_5^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$-x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$z_5 = -x_0 + ix_1 + jx_2 - kx_3$	{- + + -}
$ds_6^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$z_6 = x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3$	{+ - - -}
$ds_7^2 = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$	$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$z_7 = x_0 + ix_1 - jx_2 + kx_3$	{+ + - +}
$ds_8^2 = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$z_8 = x_0 - ix_1 + jx_2 + kx_3$	{+ - + +}
$ds_9^2 = -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$	$-x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$z_9 = -x_0 - ix_1 - jx_2 + kx_3$	{- - - +}
$ds_{10}^2 = -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$-x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$z_{10} = -x_0 - ix_1 + jx_2 - kx_3$	{- - + -}
$ds_{11}^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$-x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$z_{11} = -x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$	{- + + +}
$ds_{12}^2 = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$z_{12} = x_0 - ix_1 + jx_2 - kx_3$	{+ - + -}
$ds_{13}^2 = -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$-x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$z_{13} = -x_0 - ix_1 + jx_2 + kx_3$	{- - + +}
$ds_{14}^2 = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$-x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$z_{14} = -x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$	{- + - +}
$ds_{15}^2 = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$	$-x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$z_{15} = -x_0 + ix_1 - jx_2 - kx_3$	{- + - -}
$ds_{16}^2 = -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$-x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$	$z_{16} = -x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3$	{- - - -}

Алгебра сигнатур связывает сбалансированную относительно нуля суперпозицию линейных форм со всеми 16-ю возможными стигнатурами:

$$\begin{aligned}
ds_{\Sigma} = & (-dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3) + (dx_0 + dx_1 + dx_2 + dx_3) + \\
& + (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3) + (-dx_0 - dx_1 - dx_2 + dx_3) + \\
& + (-dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3) + (dx_0 - dx_1 - dx_2 + dx_3) + \\
& + (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3) + (-dx_0 - dx_1 + dx_2 - dx_3) + \\
& + (-dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) + (dx_0 + dx_1 - dx_2 - dx_3) + \\
& + (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) + (-dx_0 + dx_1 - dx_2 - dx_3) + \\
& + (-dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3) + (dx_0 - dx_1 + dx_2 - dx_3) + \\
& + (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3) + (-dx_0 + dx_1 + dx_2 + dx_3) = 0,
\end{aligned} \tag{65}$$

с одним из вариантов суперпозиции 16-ти A_4 -матриц, которая так же удовлетворяет условию вакуумного баланса:

$$\begin{aligned}
& x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\
& + x_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Приведенный здесь стигнатурно-спинтензорный математический аппарат удобен для решения ряда задач, связанных с многослойными внутри вакуумными вращательными процессами, которые будут рассмотрены в следующих статьях данного предлагаемого проекта.

11 Использование спинтензоров с различными стигнатурами

Рассмотрим два примера с использованием спинтензоров.

Пример 1 Пусть заданы матрица-столбец и эрмитовосопряженная ей матрица-строка

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_1^* & s_2^* \end{pmatrix}, \tag{67}$$

которые описывают состояние спинора.

Проекция спина на оси координат для случая, когда метрическое 4-пространство имеет сигнатуру $(+---)$ могут быть определены с помощью спинтензора (67) и A_4 -матрицам (59)

$$\begin{aligned} (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} &= \\ &= x_0(s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} - x_1(s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} - x_2(s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} - x_3(s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\ &= (s_1^*s_1 + s_2^*s_2)x_0 - (-s_2^*s_1 - s_2^*s_1)x_1 - (is_2^*s_1 - is_1^*s_2)x_2 - (-s_1^*s_1 + s_2^*s_2)x_3. \end{aligned} \quad (68)$$

Пример 2 Пусть прямая и обратная волны описывается выражениями

$$\vec{E}_1^{(+)} = \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \quad (69)$$

$$\vec{E}_2^{(-)} = \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \quad (70)$$

где a_+ и a_- – амплитуды прямой и обратной волны. В общем случае это комплексные числа:

$$\bar{a}_+ = a_+ e^{i\phi_+}, \quad \bar{a}_- = a_- e^{-i\phi_-}, \quad \bar{a}_+^* = a_+ e^{-i\phi_+}, \quad \bar{a}_-^* = a_- e^{i\phi_-}, \quad (71)$$

содержащие информацию о фазах волн ϕ_+ и ϕ_- .

Взаимно противоположные волны (69) и (70) можно представить в виде двухкомпонентного спинора:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} \quad (72)$$

и эрмитовосопряженного ему спинора

$$(s_1^*, s_2^*) = \langle\psi|^+ = \langle\psi| = (\bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \quad \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}). \quad (73)$$

Условие нормировки в данном случае выражается равенством

$$(s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \langle\psi|\psi\rangle = (\bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \quad \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}) \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = |\bar{a}_+|^2 + |\bar{a}_-|^2. \quad (74)$$

Для нахождения проекций спина (круговой поляризации) луча света на оси координат воспользуемся спинтензором

$$A_3 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (75)$$

который связан с 3-мерной метрикой

$$\det(A_3) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}_{det} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{vmatrix} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (76)$$

с сигнатурой $(---)$.

Полагая в выражении (75) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, рассмотрим проекции спина на оси координат

$$\begin{aligned}
& (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\
& = (s_2^* s_1 + s_2^* s_1) + (-i s_2^* s_1 + i s_1^* s_2) + (s_1^* s_1 - s_2^* s_2). \tag{77}
\end{aligned}$$

Подставляя в это выражение спиноры (72) и (73), получим три следующие проекции спина на соответствующие координатные оси $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$:

$$\begin{aligned}
\langle s_x \rangle & = \langle \psi | -\sigma_1 | \psi \rangle = (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\
& = (\bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = \bar{a}_-^* \bar{a}_+ e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} + \bar{a}_+^* \bar{a}_- e^{i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)}; \tag{78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle s_y \rangle & = \langle \psi | -\sigma_2 | \psi \rangle = (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\
& = (\bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}) \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = \\
& = \bar{a}_-^* \bar{a}_+ e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} + \bar{a}_+^* \bar{a}_- e^{i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} = i [\bar{a}_+^* \bar{a}_- e^{i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} - \bar{a}_-^* \bar{a}_+ e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)}]; \tag{79}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle s_z \rangle & = \langle \psi | -\sigma_3 | \psi \rangle = (s_1^*, s_2^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \\
& = (\bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = |\bar{a}_+|^2 - |\bar{a}_-|^2. \tag{80}
\end{aligned}$$

В случае $\varphi_+ = \varphi_- = 0$ формулы (78) – (80) приобретают следующий упрощенный вид:

$$\begin{aligned}
\langle s_x \rangle & = 2a_+ a_- \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} (ct - r) \right] = 2a_+ a_- \cos [2(\omega t - kr)], \tag{81} \\
\langle s_y \rangle & = 2a_+ a_- \sin \left[\frac{4\pi}{\lambda} (ct - r) \right] = 2a_+ a_- \sin [2(\omega t - kr)], \\
\langle s_z \rangle & = |a_+|^2 - |a_-|^2.
\end{aligned}$$

В случае равенства амплитуд прямой и обратной волн $a_+ = a_-$, вместо уравнений (81) получим следующие усредненные проекции спина

$$\begin{aligned}
\langle s_x \rangle & = 2a_+^2 \cos [2(\omega t - kr)], \tag{82} \\
\langle s_y \rangle & = 2a_+^2 \sin [2(\omega t - kr)], \\
\langle s_z \rangle & = 0.
\end{aligned}$$

Проекция спина (вращающегося вектора напряженности электрического поля) на направление распространения луча света Z неизменна и равна нулю. При этом его проекция на плоскость XY , перпендикулярную направлению распространения данного луча, вращается вокруг оси Z с угловой скоростью $\omega = 4\pi c/\lambda$. Таким образом, спинорное представление о распространении сопряженной пары волн приводит к описанию круговой поляризации без привлечения дополнительных гипотез.

Аналогично может быть выполнен анализ распространения волн в 3-мерной метрической протяженности с сигнатурами: $(---)$, $(+--)$, $(-+-)$, $(--+)$, $(+++)$, $(-++)$, $(+-+)$, $(+ +-)$.

12 Дираковское расслоение квадратичной формы

Рассмотрим дираковское «расслоение» квадратичной формы на примере метрики

$$ds^2 = c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \text{ с сигнатурой } (+ + + +). \quad (83)$$

Представим данную метрику в виде произведения двух аффинных (линейных) форм

$$ds^2 = ds' ds'' = (\gamma_0 dx_0' + \gamma_1 dx_1' + \gamma_2 dx_2' + \gamma_3 dx_3') \cdot (\gamma_0 dx_0'' + \gamma_1 dx_1'' + \gamma_2 dx_2'' + \gamma_3 dx_3''). \quad (84)$$

Раскрывая в данном выражении скобки, получим

$$ds' ds'' = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 \gamma_\mu \gamma_\eta dx^\mu dx^\eta = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 (\gamma_\mu \gamma_\eta + \gamma_\eta \gamma_\mu) dx^\mu dx^\eta. \quad (85)$$

Существует, по крайней мере, два варианта определения величин γ_μ , удовлетворяющих условию равенства выражений (83) и (85): 1) метод клиффордовых агрегатов (например, кватернионов); 2) метод Дирака.

В случае применения метода клиффордовых агрегатов линейные формы, входящие в выражение (84), представляются в виде пары аффинных агрегатов:

$$ds' = \gamma_0 c dt' + \gamma_1 dx' + \gamma_2 dy' + \gamma_3 dz' \quad (86)$$

$$ds'' = \gamma_0 c dt'' + \gamma_1 dx'' + \gamma_2 dy'' + \gamma_3 dz'' \quad (87)$$

со стигнатурой $\{ + + + + \}$, где γ_μ – объекты, удовлетворяющие антикоммутиативному условию алгебры Клиффорда

$$\gamma_\mu \gamma_\eta + \gamma_\eta \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\eta}, \quad (88)$$

где $\delta_{\mu\eta} = \begin{cases} 1 \text{ при } \mu = \eta, \\ 0 \text{ при } \mu \neq \eta \end{cases}$ – символы Кронекера. (89)

Во втором случае, метод Дирака предполагает вместо символов Кронекера (89) использовать единичную матрицу

$$\delta_{\mu\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (90)$$

тогда условию (88) удовлетворяет, например, следующий набор 4×4-матриц Дирака:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (91)$$

Эти матрицы можно рассматривать в качестве образующих соответствующей алгебры Клиффорда. В этом случае выражение (85) приобретает матричный вид

$$(ds_{ii}^2) = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 \gamma_\mu \gamma_\eta dx^\mu dx^\eta = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 (\gamma_\mu \gamma_\eta + \gamma_\eta \gamma_\mu) dx^\mu dx^\eta, \quad (92)$$

$$\text{где } (ds_{ii}^2) = \begin{pmatrix} ds_{00}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ds_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ds_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ds_{33}^2 \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Выражение (92) с учетом (90) может быть представлено в виде

$$(ds_{ii}^2) = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 \gamma_{\mu} \gamma_{\eta} dx^{\mu} dx^{\eta} = c^2 dt^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + dx^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ + dy^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + dz^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Вернемся к квадратичной форме (83) и ее дираковскому расслоению (92)

$$(ds_{ii}^2) = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 \gamma_{\mu} \gamma_{\eta} dx^{\mu} dx^{\eta} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 b_{\mu\eta} dx^{\mu} dx^{\eta}, \quad (95)$$

$$\text{где } \gamma_{\mu} \gamma_{\eta} = b_{\mu\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Рассмотрим всевозможные варианты записи выражения (95). Для этого воспользуемся следующим базисом из шестнадцати всевозможных $\gamma_{\mu}^{(\rho)}$ -матриц Дирака:

$$\begin{aligned} \gamma_0^{(0)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \gamma_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2^{(0)} &= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} & \gamma_3^{(0)} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_0^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_1^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_3^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_0^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_1^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2^{(2)} &= \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \gamma_3^{(2)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_0^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \gamma_1^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_2^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} & \gamma_3^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (97)$$

Метод Дирака, в отличие от метода аффинных агрегатов, позволяет одновременно «расслаивать» сразу четыре метрических пространства с четырьмя метриками, являющимися компонентами матрицы (93).

В Алгебре сигнатур рассматриваются шестнадцать квадратичных форм (31) с соответствующими сигнатурами (32), каждую из них можно также «расслоить» по методу Дирака

$$(ds_{ii}^{(a,b)2}) = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 \gamma_{\mu}^{(a)} \gamma_{\eta}^{(b)} dx^{\mu} dx^{\eta}, \quad (98)$$

$$\text{где } \gamma_{\mu}^{(a)} \gamma_{\eta}^{(b)} = b_{\mu\eta}^{(ab)}, \quad (99)$$

но в этом случае каждая $b_{\mu\eta}^{(ab)}$ -матрица имеет соответствующую сигнатуру:

$$\begin{aligned} b_{\mu\eta}^{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{20} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{30} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b_{\mu\eta}^{01} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{11} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{21} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{31} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b_{\mu\eta}^{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{22} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{32} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ b_{\mu\eta}^{03} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{23} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & b_{\mu\eta}^{33} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (100)$$

Знаки перед единицами в диагональных $b_{\mu\eta}^{(ab)}$ -матрицах соответствуют наборам знаков в компонентах матрицы сигнатур (32). В этом пункте для краткости верхние индексы будем временно опускать и вместо « $b_{\mu\eta}^{(ab)}$ -матрица» будем писать « $b_{\mu\eta}$ -матрица».

Вернемся к дираковскому «расслоению» квадратичной формы (92)

$$(ds_{ii}^2) = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 \gamma_{\mu} \gamma_{\eta} dx^{\mu} dx^{\eta} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 b_{\mu\eta} dx^{\mu} dx^{\eta}, \quad (101)$$

$$\text{где } \gamma_{\mu} \gamma_{\eta} = b_{\mu\eta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (102)$$

и рассмотрим всевозможные варианты ее раскрытия.

Каждой из шестнадцати $\gamma_{\mu}^{(\rho)}$ -матриц (97) можно подобрать вторую $\gamma_{\chi}^{(\tau)}$ -матрицу из этого же набора, такую, что их произведение равно $b_{\mu\eta}$ -матрице (102). Например:

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (103)$$

Каждая $\gamma_{\mu}^{(\rho)}$ -матрица (97) может иметь одну из 16-и возможных стигнатур. Например:

$$\begin{aligned}
\gamma_{11}^{00} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{20} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{30} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_{11}^{01} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{31} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_{11}^{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{22} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{32} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma_{11}^{03} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \gamma_{11}^{33} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{104}$$

Для каждой из этих $\gamma_{\mu\rho}^{ij}$ -матриц также можно подобрать вторую $\gamma_{\chi^i}^{nj}$ -матрицу, произведение с которой приводит к $b_{\mu\rho}$ -матрице (102).

Таким образом, с учетом 16-и стигнатур из 16-ти $\gamma_{\mu\rho}$ -матриц (97) получается $16 \times 16 = 256$ $\gamma_{\mu\rho}^{ij}$ -матриц. Каждую $\gamma_{\mu\rho}^{ij}$ -матрицу (104) можно превратить в одну из 16-ти смешанных матриц. Поясним данное утверждение на примере γ_{11}^{13} -матрицы:

$$\begin{aligned}
{}_{00}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{10}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{20}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{30}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
{}_{01}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{11}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{21}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{31}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
{}_{02}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{12}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{22}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{32}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
{}_{03}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{13}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{23}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} & {}_{33}\gamma_{11}^{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{105}$$

При подобном размешивании всех 256-ти $\gamma_{\mu\rho}^{ij}$ -матриц (105) получается базис из $16^3 = 256 \times 16 = 4096$ ${}_{nk}\gamma_{\mu\rho}^{ij}$ -матриц. Следовательно, в этом случае $b_{\mu\rho}$ -матрица (102) может быть задана одной из 4096 произведений пар ${}_{nk}\gamma_{\mu\rho}^{ij}$ -матриц.

В свою очередь, все шестнадцать $b_{\mu\nu}$ -матриц (100) могут быть заданы $16^4 = 65536$ различными вариантами парных произведений ${}^{vc}{}_{nk} \gamma_{lm}{}^{ij}$ -матриц. Подобным образом можно продолжать наращивание базиса обобщенных γ -матриц Дирака практически до бесконечности.

Выше было рассмотрено дираковское «расслоение» только одной квадратичной формы (83). Точно так же «расслаиваются» все остальные метрики (31).

Всю совокупность ${}^{vc}{}_{nk} \gamma_{lm}{}^{ij}$ -матриц будем называть обобщенными матрицами Дирака, а метрику, препарированную посредством этих матриц, будем называть дираковским расслоением квадратичной формы с соответствующей сигнатурой.

ВЫВОДЫ

В этой второй части «Геометризированной физики вакуума» отсутствуют физические модели. Данная статья посвящена развитию математического аппарата Алгебры сигнатур, который вытекает из Алгебры стигнатур [1].

Алгебра стигнатур и Алгебра сигнатур – это своеобразные ментальные очки, которые рекомендуется одеть на умозрение исследователя, чтобы распознавать Смыслы реализованные в окружающей нас реальности.

Для некоторых исследователей будет важным знать, что Алгебра стигнатур и Алгебра сигнатур (под общим сокращенным названием «Алсигна») – это расширение древней пифагорейской традиции (т.е. научного знания) на основании Алгоритмов раскрытия Великого и Грозного Имени ВСЕВЫШНЕГО 7-7-7-7 (Йюд-Кей-Вав-Кей) [3], лежащих в основе Иудаизма, и дополненных логическими конструкциями Даосизма, Индуизма, Зороастризма и Ометеотля.

Алсигна открыта для ее пополнения и расширения на основании логических концептов различных религий, культур и философских школ. Математический аппарат Алсигны может развиваться представителями всех древних философских традиций, при неотложном соблюдении условия «вакуумного (т.е. нулевого) баланса». В этом смысле Алсигна может послужить универсальной научной платформой для общего когнитивного «Согласия».

В этой статье попарное скалярное перемножение векторов из всех 16-и аффинных пространств с 4-базисами, показанными на рис. 3, привело к формированию $16 \times 16 = 256$ метрических 4-пространств с 4-метриками вида (10), которые пересекаются в исследуемой точке O (рис. 1).

Среди 256 метрических пространств оказалось 16 типов пространств с соответствующими сигнатурами, образующими матрицу сигнатур (32)

$$stign(ds^{(a,b)2}) = \begin{pmatrix} (+ + + +) & (+ + + -) & (- + + -) & (+ + - +) \\ (- - - +) & (- + + +) & (- - + +) & (- + - +) \\ (+ - - +) & (+ + - -) & (+ - - -) & (+ - + +) \\ (- - + -) & (+ - + -) & (- + - -) & (- - - -) \end{pmatrix}.$$

Свойства данной матрицы сигнатур во многом повторяют свойства матрицы стигнатур полученной в статье [1].

Далее было показано что сигнатура метрического пространства связана с ее топологией, а аддитивное наложение 256-ти метрических пространств с 16-тью типами топологий (или сигнатур) удовлетворяет условию вакуумного баланса.

Вместе с тем, выяснилось, что математический аппарат Алгебры сигнатур допускает аддитивное наложение бесконечного количества метрических пространств с 16-тью типами топологий при условии вакуумного (т.е. нулевого) баланса, что приводит к формированию Риччи плоского пространства, сходного с многообразием Калаби-Яу.

В завершении статьи рассмотрено спин-тензорное представление метрик с различными сигнатурами и представлено дираковского расслоение квадратичных форм, для описания сложных вращательных внутри-вакуумных процессов.

Развиваемый здесь и в предыдущей статье [1] математический аппарат Алсигны будет использован в последующих статьях этого проекта для описания и математического моделирования многих вакуумных эффектов и других физических явлений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаю искреннюю благодарность р. Гавриэлю Давидову, Дэвиду Риду (David Reid) и р. Элизеру Рахману за оказание помощи. В обсуждении статьи участвовали академик РАН Шипов Г.И., к.ф.-м.н. Лукьянов В.А., Лебедев В.А., Прохоров С.Г. и Храмынин В.П. Также, автор признателен за поддержку Саловой М.Н., Морозовой Т.С., Пржигодскому С.В., Маслову А.Н., Болотову А.Ю., к.пс.н. Леви Т.С., Мусанову С.В., Батановой Л.А., к.т.н. Мышелову Е.П., Чивикову Е.П.

ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ ИСТОЧНИКИ (ССЫЛКИ)

- [1] Batanov-Gaukhman, M. (2023) "Geometrized vacuum physics. Part I. Algebra of stignatures", doi:10.20944/preprints202306.0765.v1.
- [2] Shipov, G. (1998). A Theory of Physical Vacuum". Moscow ST-Center, Russia ISBN 5 7273-0011-8. (Шипов Г.И. (1996) Теория физического вакуума. – М.: Наука, 1996. – 449 стр. ISBN 5-02-003682-X [на русском]).
- [3] Klein, F. (2004) Non-Euclidean geometry – Moscow: Editorial URSS, p.355, ISBN 5-354-00602-3 [in Russian].
- [6] Rashevsky, P.K. (2006) The theory of spinors. – Moscow: Editorial URSS, p.110, ISBN 5-484-00348-2 [in Russian].
- [7] Gaukhman, M.Kh. (2007) Algebra of signatures "NAMES" (orange Alsigna). – Moscow: LKI, p.228, ISBN 978-5-382-00077-0, (www.alsigna.ru) [in Russian]. Гаухман М.Х. (04.2007) Алгебра сигнатур «ИМЕНА» (оранжевая Алсигна).– М.: ЛКИ, 2007, С.228, ISBN 978-5-382-00077-0, (доступно на www.alsigna.ru) [на русском].
- [8] Greene, B. (2003) "The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory" 448 pp. ISBN, [0-393-05858-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4002-6311-1)
- [9] Milonni, P.W. (1994). "The Quantum Vacuum. An Introduction to Quantum Electrodynamics", Academic Press, Inc., Boston, ISBN 0-12-498080-5.
- [10] Milton, K. M. (1990) "Cosmic Understanding: Philosophy and Science of the Universe. — Princeton University Press, p. 132. «The spontaneous, temporary emergence of particles from vacuum is called a "vacuum fluctuation", ISBN 978-0-691-02059-4.
- [11] Moray, B. K. (2001) "Quest for zero point energy: engineering principles for 'free energy' inventions". Adventures Unlimited Press, p. 124 ff. ISBN 978-0-932813-94-7.
- [12] Klein, J. J. & Nigam, B. P. (1964) "Birefringence of the vacuum", Physical Review vol. 135, p. B1279-B1280.
- [13] Bednorz, A. (2013) "Relativistic invariance of the vacuum". The European Physical Journal C. 73 (12): 2654. arXiv:1209.0209. Bibcode:2013EPJC...73.2654B. DOI:10.1140/epjc/s10052-013-2654-9. S2CID 39308527.
- [14] Walter, D. (2000) "Probing the quantum vacuum: perturbative effective action approach". Walter Dittrich, Gies H. Berlin : Springer, ISBN 978-3-540-67428-3.

[15] Christopher, R. (1991) "Time, space and philosophy". London/New York: Routledge, Chapter 10, p. 205. ISBN 978-0-415-03221-6.

[16] Schwinger, J. (1951) "On Gauge Invariance and Vacuum. Polarization". Phys. Rev. 82, p. 664

[17] Hajdukovic, D.S. (2010) What Would Be Outcome of a Big Crunch? International Journal of Theoretical Physics volume 49, pp. 1023–1028