

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ РЕШЕНИЙ ВАКУУМНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА. СТАБИЛЬНЫЕ ВАКУУМНЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Analysis of the Possibility of Averaging Solutions of Einstein's Vacuum Equations. Stable vacuum formations

Михаил Батанов-Гахман¹, Джулиан Круз²

(1) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Институт № 2 "Авиационные и ракетные двигатели и энергетические установки",
ул. Волоколамское шоссе 4, Москва – Россия, 125993
(e-mail: alsignat@yandex.ru)

(2) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Институт № 6 "Аэрокосмический", ул. Волоколамское шоссе 4, Москва – Россия, 125993
(e-mail: julianarturocruzperez@mail.ru)

АННОТАЦИЯ

В этой статье рассмотрены известные и дополнительные решения вакуумных уравнений Эйнштейна без лямбды члена и с лямбда членом, с сигнатурами (+ ---) и (- +++). Исследована возможность усреднения этих решений. Показано, что усреднение метрик-решений вакуумных уравнений Эйнштейна могут быть положены в основание метрико-динамических моделей стабильных вакуумных образований корпускулярного типа.

ABSTRACT

This article discusses known and additional solutions of Einstein's vacuum equations without a lambda term and with a lambda term, with signatures (+ ---) and (- +++). The possibility of averaging these solutions is investigated. It is shown that the averaging of metrics-solutions of Einstein's vacuum equations can be used as the basis for metric-dynamic models of stable vacuum formations of the corpuscular type.

Ключевые слова: вакуум, вакуумное уравнение Эйнштейна, сигнатура, решения вакуумного уравнения.
Keywords: vacuum, Einstein's vacuum equation, signature, solutions to the vacuum equation.

ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассмотрены хорошо известные и дополнительные сферически симметричные, стационарные решения вакуумного уравнения Эйнштейна без лямбды члена

$$R_{ik} = 0, \tag{1}$$

и с лямбда членом $R_{ik} \pm \Lambda g_{ik} = 0$.

где

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^l - \text{тензор Риччи}; \tag{2}$$

$$\Gamma_{ik}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) - \text{символы Кристоффеля}; \tag{3}$$

g_{ik} и $g^{\lambda\mu}$ – ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора искривленного 4-мерного пространства с метрикой

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{4}$$

Уравнение (1) рассмотрено во многих научных изданиях по современной дифференциальной геометрии и общей теории относительности, например, в [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Однако ни в одной из известных автору книг и статей не показан полный набор решений этого уравнения, и не обсуждается взаимосвязь между этими решениями. Поэтому повторим решения уравнения (1) подробно.

Решения вакуумного уравнения Эйнштейна (1) для стационарного случая ищут в сферической системе координат

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, r, \theta, \varphi) \quad (5)$$

в виде псевдо-метрики:

$$ds^{(+2)} = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \text{ с сигнатурой } (+---), \quad (6)$$

или

$$ds^{(-2)} = -e^\nu c^2 dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \text{ с сигнатурой } (-+++), \quad (7)$$

где ν и λ – искомые функции времени t и расстояния r ;
 c – скорость света в вакууме.

В этой статье «4-мерные псевдо-метрики» для упрощения будем называть «метриками».

В метрике (6) отличные от нуля компоненты метрического тензора равны

$$g_{00} = e^\nu, \quad g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta, \quad (8)$$

а контравариантные им компоненты равны

$$g^{00} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2}\theta. \quad (9)$$

Подставляя компоненты метрических тензоров (8) и (9) в выражения (3), вычисляют символы Кристоффеля (штрих означает дифференцирование по r , а точка над буквой – дифференцирование по ct) [1]:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= \frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma_{11}^0 &= \frac{\lambda}{2} e^{\lambda-\nu}, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{-\lambda}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= ctg\theta, & \Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{\nu}}{2}, \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{\dot{\lambda}}{2}, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2\theta \cdot e^{-\lambda}. \end{aligned} \quad (10)$$

Остальные символы Кристоффеля Γ_{kl}^i (кроме тех, которые отличаются перестановкой индексов k и l) равны нулю.

Широко известно, что при подстановке символов Кристоффеля (10) в вакуумное уравнение (1) для стационарного случая (т.е. при $\nu = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$) получается следующая система дифференциальных уравнений [1]:

$$R_{00} = R_{11} = \nu'' + \nu'^2 + 2\nu'/r = 0, \quad (11)$$

$$R_{22} = e^{-\lambda} (\lambda'/r - 1/r^2) + 1/r^2 = 0, \quad (12)$$

$$R_{33} = e^{-\lambda} (\nu'/r + 1/r^2) - 1/r^2 = 0, \quad (13)$$

$$\nu = -\lambda.$$

Уравнения (11), (12) и (13) имеет по три одинаковых решения:

$$e^{-\lambda} = e^\nu = (1 + r_0/r), \quad e^{-\lambda} = e^\nu = (1 - r_0/r), \quad e^{-\lambda} = e^\nu = 1, \quad (14)$$

$$\text{или } -\lambda = \nu = \ln(1 + r_0/r), \quad -\lambda = \nu = \ln(1 - r_0/r), \quad -\lambda = \nu = \ln 1, \quad (15)$$

где r_0 – константа интегрирования (в частности, радиус сферы, смысл которой будет выяснен ниже).

В том, что каждое из трех выражений (14) является решением уравнений (11), (12) и (13) легко убедиться, с помощью поочередной подстановки этих решений в данные уравнения.

Подставляя три возможных решения (14) в метрику (6), получим три метрики-решения вакуумного уравнения (1) с одинаковой сигнатурой (+ ---):

$$ds_1^{(+)^2} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (16)$$

$$ds_2^{(+)^2} = \left(1 + \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (17)$$

$$ds_3^{(+)^2} = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (18)$$

Продельвая аналогичные операции с компонентами метрического тензора из метрики (7) с противоположной сигнатурой (- + + +)

$$g_{00} = -e^v, \quad g_{11} = e^\lambda, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (19)$$

и контравариантными им компонентами

$$g^{00} = -e^{-v}, \quad g^{11} = e^{-\lambda}, \quad g^{22} = r^{-2}, \quad g^{33} = r^{-2} \sin^{-2} \theta, \quad (20)$$

получим еще три метрики-решения вакуумного уравнения (1) с противоположной сигнатурой (- + + +):

$$ds_1^{(-)^2} = -\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (21)$$

$$ds_2^{(-)^2} = -\left(1 + \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (22)$$

$$ds_3^{(-)^2} = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (23)$$

Отметим, что при $r_0 = 0$ метрики (16) и (17) становятся метрикой (18), а метрики (21) и (22) переходят в метрику (23).

Принято считать, что одинаковые метрики с противоположными сигнатурами (+ ---) и (- + + +) изоморфны. Однако это не всегда так. Данный вопрос подробно исследуется в серии статей [12, 13, 14, 15]. В этой статье отметим только следующее: если условно принять, что метрики с сигнатурами (+ ---) определяют метрико-динамические модели «выпуклых» вакуумных образований, то аналогичные метрики с противоположной сигнатурой (- + + +) определяют метрико-динамические модели точно таких же, но «вогнутых» вакуумных образований. Одинаковые «выпуклые» и «вогнутые» стабильные вакуумные образования полностью компенсируют проявления друг друга, поддерживая вакуумный баланс (+ ---) + (- + + +) = 0.

Все метрики (16) – (18) и (21) – (23) являются решениями вакуумного уравнения (1), но только квадратичную форму (16) называют метрикой Шварцшильда, при условии

$$r_0 = r_g = 2GM/c^4, \quad (24)$$

где M – масса небесного тела, G – гравитационная постоянная ($G \approx 6,67430 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1}$).

Согласно прямой теореме Биркгофа и обратной теореме Израэля нет других точных сферически симметричных статических решений вакуумного уравнения (1), кроме метрик (16) – (18) и (21) – (23), которые на бесконечности стремятся к метрике Минковского (т.е. к метрике плоского псевдоевклидова пространства).

Однако в ОТО в силу того, что уравнение (1) обще ковариантно, остается множество возможностей выбора других систем координат. Особый интерес представляют преобразования координат: Крускала (Kruskal-Szekeres coordinate); Эддингтона - Финкельштейна (Eddington - Finkelstein coordinates); Леметра (Lemaître coordinates); Гуллстранда - Пенлеве (Gullstrand - Painlevé coordinates); Изотропные (Isotropic coordinates); Гармонические (Harmonic coordinates), поскольку данные преобразования позволяют исключить или сместить в центр пространственную сингулярность при $r_0 = r$ в метриках (16) – (17) и (21) – (22). Однако при $r_0 = r$ временную сингулярность в этих метриках исключить не удается.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОД

1 Усреднение метрик-решений вакуумного уравнения

Во введении были приведены метрики-решения вакуумного уравнения (1), которые хорошо известны специалистам в области общей теории относительности и дифференциальной геометрии Римана. В этом параграфе и далее будут представлены новые результаты.

Рассмотрим три метрики (16) – (18):

$$ds_1^{(+2)} = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (16')$$

$$ds_2^{(+2)} = \left(1 + \frac{r_0}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r_0}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (17')$$

$$ds_3^{(+2)} = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (18')$$

Метрика (18) является частным случаем первых двух метрик (16) и (17) при $r_0 = 0$, и описывает состояние исходного (т.е. неискривленного) эйнштейновского вакуума.

Метрики (16) и (17) описывают разные искривленные состояния эйнштейновского вакуума, но они равнозначны и нельзя отдать предпочтение ни одной из них без потери информации об рассматриваемой области пространства. Поэтому сформулируем гипотезу, что обе метрики (16) и (17) совместно описывают метрико-динамическое состояние одной и той же области эйнштейновского вакуума (далее *вакуума*), и рассмотрим результат их усреднения

$$ds_{12}^{(+2)} = \frac{1}{2}(ds_1^{(+2)} + ds_2^{(+2)}) = c^2 dt^2 - \frac{r^2}{r^2 - r_0^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (25)$$

В ОТО расстояние между двумя событиями с разными r , но с одинаковыми остальными координатами, определяется интегралом [1]

$$\xi = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{-g_{11}^{(+)}} dr. \quad (26)$$

Если $g_{11}^{(+)} = -(1 - r_0/r)^{-1}$ из метрики (16) или $g_{11}^{(+)} = -(1 + r_0/r)^{-1}$ из метрики (17) подставить в интеграл (26), то такой интеграл не берется в элементарных функциях.

Тогда как при подстановке компоненты $g_{(12)11}^{(+)} = -\frac{r^2}{r^2 - r_0^2}$ из усредненной метрики (25) в интеграл (26), удается найти аналитическое решение

$$\xi = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = \sqrt{r^2 - r_0^2} \Big|_{r_1}^{r_2}. \quad (27)$$

Найдем сначала величину отрезка между точками $r_1 = 0$ и $r_2 = r_0$:

$$\sqrt{r^2 - r_0^2} \Big|_0^{r_0} = -\sqrt{-r_0^2} = -\sqrt{-1}r_0 = -ir_0. \quad (28)$$

Длина этого отрезка равна радиусу полости r_0 , а мнимость этого результата говорит о том, что усредненная метрика (25) не описывает свойства *вакуума* внутри шарообразной полости с радиусом r_0 . Другими словами, область применимости метрики (25) начинается от r_0 и простирается до $r_2 = \infty$. В этом случае имеем

$$\sqrt{r^2 - r_0^2} \Big|_{r_0}^{\infty} = \sqrt{\infty^2 - r_0^2}. \quad (29)$$

Если бы исследуемая область *вакуума* не была деформирована, то расстояние между точками $r_2 = \infty$ и $r_1 = r_0$ было бы равно $r_2 - r_1 = \infty - r_0$, а в нашем случае оно равно величине (29), вычитая одно из другого, обнаруживаем

$$\sqrt{\infty^2 - r_0^2} - (\infty - r_0) = r_0, \quad (30)$$

так как к этому результату приводит предельный расчет

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - r_0^2} - (x - r_0) = r_0.$$

Полученный результат показывает, что *вакуум* сжат на величину $\sim r_0$ во всех радиальных направлениях, а причина такого сжатия связана с тем, что он «вытеснен» из полости с радиусом r_0 . Это похоже на воздушный пузырь в жидкости (рис. 1).

Об искажениях исследуемой области *вакуума* будем судить по его относительному удлинению [9]

$$l^{(+)} = \frac{ds^{(+)} - ds_0^{(+)}}{ds_0^{(+)}} = \frac{ds^{(+)}}{ds_0^{(+)}} - 1. \quad (31)$$

При этом относительное удлинение по каждой координате определяется выражениями [9]

$$l_i^{(+)} = \sqrt{1 + \frac{g_{ii}^{(+)} - g_{ii0}^{(+)}}{g_{ii0}^{(+)}}} - 1, \quad (32)$$

где $g_{ii}^{(+)}$ – компоненты метрического тензора искривленного участка *вакуума*.

$g_{ii0}^{(+)}$ – компоненты метрического тензора того же участка *вакуума* до искривления (т.е. при отсутствии его искривления).

Подставим в выражения (32) компоненты $g_{ii}^{(+)}$ из усредненной метрики (25), и компоненты $g_{ii0}^{(+)}$ из исходной метрики (18), в результате получим

$$l_r^{(+)} = \frac{\Delta r}{r} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - r_0^2}} - 1, \quad l_\theta^{(+)} = 0, \quad l_\phi^{(+)} = 0. \quad (33)$$

График функции $l_r^{(+)} = \Delta r/r$, при $r_0 = 1$, приведен на рис. 2. При $r = r_0$ данная функция стремится к бесконечности $\Delta r/r = \infty$, а при $r < r_0$ она становится мнимой, что еще раз подтверждает модель «пустого пузыря в жидкости». Такой пустой пузырь будем называть «сферической полостью Шварцшильда».

Если теперь усреднить метрики (21) и (22)

$$ds_{12}^{(-)2} = \frac{1}{2}(ds_1^{(-)2} + ds_2^{(-)2}) = -c^2 dt^2 + \frac{r^2}{r^2 - r_0^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \text{ с сигнатурой } (-+++), \quad (34)$$

и проделать аналогичные действия (26) – (33) с учетом исходной метрики (23), то получим метрико-динамическую модель точно такого же (смотрите рис. 1 и 2), но противоположного, стабильного, условно «вогнутого» вакуумного образования типа «сферическая анти-полость Шварцшильда» с относительным удлинением

$$l_r^{(-)} = \frac{\Delta r}{r} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - r_0^2}} - 1, \quad l_\theta^{(-)} = 0, \quad l_\phi^{(-)} = 0. \quad (35)$$

Таким образом, усреднение метрик (16) и (17), а также усреднение метрик (21) и (22) приводит к метрико-динамическим моделям взаимно противоположных стабильных вакуумных образований типа «сферическая полость Шварцшильда» и «сферическая анти-полость Шварцшильда». Тогда как по отдельности (16), (17), (21) и (22) к таким результатам не приводят. Это подтверждает состоятельность гипотезы о возможности усреднения различных метрических решений одного и того вакуумного уравнения.



Рис. 1: Воздушный пузырь в жидкости

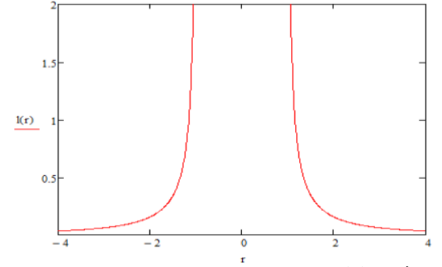


Рис. 2: График функции (33) $l_r^{(+)} = \frac{\Delta r}{r}$

В пользу возможности усреднения метрик-решений вакуумного уравнения (1) говорит еще то обстоятельство, что усреднение всех шести метрик (16) – (18) и (21) – (23) приводит еще к двум тривиальным (т.е. нулевым) псевдометрикам-решениям этого уравнения

$$\frac{1}{6}(ds_1^{(+2)} + ds_2^{(+2)} + ds_3^{(+2)} + ds_1^{(-2)} + ds_2^{(-2)} + ds_3^{(-2)}) = \pm 0 \cdot c^2 dt^2 \mp 0 \cdot dr^2 \mp 0 \cdot r^2 d\theta^2 \mp 0 \cdot r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (36)$$

Значительным преимуществом рассматриваемых усредненных метрико-динамических моделей «сферической полости Шварцшильда» и «сферической анти-полости Шварцшильда» является, то обстоятельство, что нулевая компонента метрического тензора в усредненных метриках (25) и (34) равна единице ($g_{00}^{(+)} = 1$). Это означает, что в этих моделях время t глобально, поэтому данные стабильные вакуумные образования могут сосуществовать в одном глобальном пространстве с единым временем. Кроме того, в этих усредненных метриках отсутствует временная сингулярность.

«Является ли усредненные метрики (25) и (34) инвариантными относительно преобразований Лоренца?». Данный вопрос требует дополнительного исследования. Однако в силу того, что, например, метрики-решения (16) и (17) по отдельности являются Лоренц-ковариантными, не исключено, что и их сумма обладает теми же свойствами.

В этом параграфе были использованы все известные решения вакуумного уравнения Эйнштейна (1) и это привело к усредненным метрико-динамическим моделям взаимно-противоположной пары вакуумных образований «сферическая полость Шварцшильда» - «сферическая анти-полость Шварцшильда». Однако при этом возникли три проблемы:

- 1] Усредненные метрики (25) и (34) оказались не метрикой Шварцшильда, которая, по убеждению всего научного сообщества, надежно проверена и экспериментально подтверждена в низших порядках приближения ОТО к ньютоновой теории (т.е. для случая слабых гравитационных полей).
- 2] Относительные удлинения *вакуума* (33) и (35) при $r = r_0$ стремятся к бесконечности ($\Delta r/r = \infty$). Наличие такой сингулярности – это явный индикатор неполноты рассматриваемой математической модели.
- 3] Если *вакуум* вытеснен из сферической области с радиусом r_0 , то не понятно, что внутри такой пустой полости.

Возможные пути решения данных проблем предложены ниже.

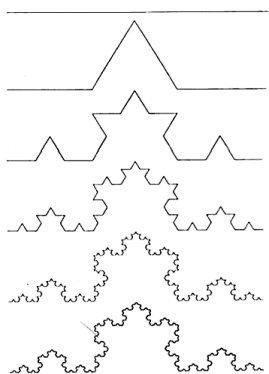


Рис. 3: Первые шесть итераций фрактала «кривая Коха»

2 Качественное обсуждение проблемы сингулярности

При $r = r_0$ функции относительного удлинения вакуума (33) и (35), стремятся к бесконечности ($\Delta r/r = \infty$, смотрите рис. 2).

Очевидно, что в рамках дифференциальной геометрии Римана проблема наличия сингулярности в метриках-решениях вакуумного уравнения (1) в принципе не разрешима. Возможно, эта задача будет решена в результате наращивания возможностей дифференциальной геометрии, например, за счет учета не только искривления, но и кручений, смещений и других искажений пространства.

Другими словами, для решения проблемы сингулярностей требуется радикальное наращивание возможностей математического аппарата дифференциальной геометрии.

В этой статье отметим только одно обстоятельство, которое может способствовать решению этой проблемы.

Напомним свойство фрактала «кривая Коха» (рис. 3). Этот фрактал обладает двумя неординарными свойствами: 1) любая итерация кривой Коха – это пример непрерывной линии, к которой нельзя провести касательную ни в одной точке (т.е. эти линии не дифференцируемы); 2) если длина исходного отрезка Коха равна 1, то длина n -й итерации данного фрактала равна $(4/3)^{n-1}$. Поэтому при $n = \infty$ длина кривой Коха стремится к бесконечности

Вернемся к проблеме сингулярностей в усредненных метриках (25) и (35). Следует ожидать, что в районе сферы с радиусом r_0 (эту область будем называть «ракия») увеличение длины радиальных отрезков происходит за счет уменьшения масштаба их изломанности (рис. 4), подобно уменьшению масштаба изломанности «кривой Коха» по мере увеличения числа итераций. Это подобно тому, как при превышении числа Рейнольдса течение жидкости

переходит от ламинарного к турбулентному. При этом по мере приближения к r_0 , удлинение таких изломанных, или изогнутых, или намотанных и т.д., отрезков может стремиться к бесконечности.

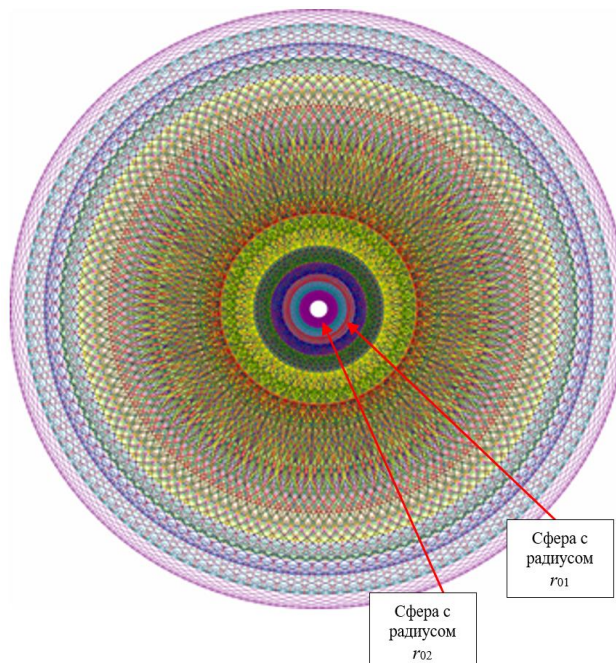


Рис. 4: Увеличение изломанности линий по мере приближения к центральной полости (рисунок Прохорова – Лебедева)

3 Усредненная Шварцшильд-подобная метрика

Предположим, что в метриках (16) и (17) радиусы r_0 незначительно отличаются друг от друга. То есть рассмотрим случай, когда в области, окружающей сферическую полость (т.е. в *ракии*), имеется не одна пограничная сфера, а две (как показано на рис. 4) с радиусами r_{01} и r_{02} такими, что

$$r_{01} \approx r_{02} \approx r_0 \text{ и } r_{01} \geq r_{02}. \quad (37)$$

В этом случае метрики (16) и (17) приобретают вид

$$ds_1^{(+2)} = \left(1 - \frac{r_{01}}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_{01}}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (38)$$

$$ds_2^{(+2)} = \left(1 + \frac{r_{02}}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{r_{02}}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (39)$$

Усредним метрики (38) и (39) с учетом условий (37) (т.е. малого отличия r_{01} от r_{02})

$$ds_{12}^{(+2)} = \frac{1}{2} (ds_1^{(+2)} + ds_2^{(+2)}) \approx \left(1 + \frac{r_{02} - r_{01}}{2r}\right) c^2 dt^2 - \frac{r_0^2}{r_0^2 - r^2} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (40)$$

Нулевая компонента метрического тензора в усредненной метрике (40) равна

$$g_{00} = \left(1 + \frac{r_{02} - r_{01}}{2r}\right) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad (41)$$

где $r_g = \frac{r_{01} - r_{02}}{2}$

– величина, которая может быть интерпретирована, как усредненный радиус Шварцшильда стабильного корпускулярного вакуумного образования.

С учетом выражения (41) метрику (40) можно представить в Шварцшильд-подобном виде

$$ds_{(12)}^{(+2)} \approx \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (42)$$

Например, известно, что у планеты Земная $r_{gE} \approx 0,9$ см. Тогда согласно выражению (41), если наши предположения верны, то внутри нашей планеты есть две пограничные сферы с разницей радиусов

$$r_{o1E} - r_{o2E} \approx 2r_{gE} \approx 1,8 \text{ см.}$$

При этом все экспериментально подтверждённые слабые гравитационные эффекты в окрестности нашей планеты остаются в силе.

Можно также предположить, что средний радиус сферической полости Земли r_0 соответствует радиусу ее твердого внутреннего ядра $r_{0E} \approx 1220$ км.

При этом все экспериментально подтверждённые гравитационные эффекты остаются в силе. Можно также предположить, что средний радиус *ракии* Земли соответствует радиусу твердого внутреннего ядра нашей планеты $r_{0E} \approx 1220$ км.

Таким образом в рамках рассматриваемых усредненных моделей стабильных вакуумных образований проблема Шварцшильд-подобного гравитационного потенциала легко решается.

4 Проверка возможности найти другие решения вакуумного уравнения Эйнштейна

Чтобы разобраться с вопросом: «Что находится внутри сферических полости и анти-полости (рис. 1 и 2)?» мы предприняли попытку искать решения вакуумного уравнения (1) в виде метрик

$$ds_*^{(+2)} = e^{-\nu} c^2 dt^2 - e^{-\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \text{ с сигнатурой } (+---), \quad (43)$$

и

$$ds_*^{(-2)} = -e^{-\nu} c^2 dt^2 + e^{-\lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \text{ с сигнатурой } (-+++). \quad (44)$$

Эти метрики в некотором смысле антисимметричны по отношению к метрикам (6) и (7), поэтому будем называть их «перевернутыми».

В «перевернутой» метрике (43) отличные от нуля компоненты метрического тензора равны

$$g_{00} = e^{-\nu}, \quad g_{11} = -e^{-\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (45)$$

а контравариантные им компоненты равны

$$g^{00} = e^{\nu}, \quad g^{11} = -e^{\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta. \quad (46)$$

Подставив компоненты метрических тензоров (45) и (46) в уравнение (3), вычислим символы Кристоффеля (расчеты выполнил Круз Перес Джулиан Артуро (Cruz Perez Julian Arturo), расчет представлен в Приложении 1), штрих означает дифференцирование по r , а точка над буквой означает дифференцирование по ct :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= -\frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma_{11}^0 &= -\frac{\lambda}{2} e^{\nu-\lambda}, & \Gamma_{22}^1 &= -r e^{\lambda}, & \Gamma_{00}^1 &= -\frac{\nu'}{2} e^{\lambda-\nu}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= ctg\theta, & \Gamma_{00}^0 &= -\frac{\nu}{2}, \\ \Gamma_{10}^1 &= -\frac{\lambda}{2}, & \Gamma_{33}^1 &= -r e^{\lambda} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (47)$$

Остальные символы Кристоффеля Γ_{kl}^j (кроме тех, которые отличаются перестановкой индексов k и l) равны нулю.

Точно такие же символы Кристоффеля Γ_{kl}^j получаются при использовании компонент метрического тензора из метрики (44).

Таким образом в случае, когда в качестве исходных берутся метрики (43) с сигнатурой (+---) или (44) с сигнатурой (-+++), вместо системы уравнений (11) – (13) получим систему уравнений (смотрите Приложение 2)

$$R_{00} = R_{11} = v'' - v'^2 + 2v'/r = 0, \quad (48)$$

$$R_{22} = e^\lambda (\lambda'/r + 1/r^2) - 1/r^2 = 0, \quad (49)$$

$$R_{33} = e^\lambda (v'/r - 1/r^2) + 1/r^2 = 0, \quad (50)$$

$$\lambda = -v$$

Уравнения (48), (49) и (50) имеет по три одинаковых решения:

$$e^\lambda = e^{-v} = (1 + r_0/r), \quad e^\lambda = e^{-v} = (1 - r_0/r), \quad e^\lambda = e^{-v} = 1, \quad (51)$$

$$\text{или } \lambda = -v = \ln(1 + r_0/r), \quad \lambda = -v = \ln(1 - r_0/r), \quad \lambda = -v = \ln 1, \quad (52)$$

При подстановке решений (51) в метрики (43) и (44) получим метрики-решения вакуумного уравнения (1), которые полностью совпадают с решениями (16) – (18) и (21) – (23).

Таким образом, мы убедились, что при применение «перевернутых» исходных метрик (43) и (44) получаются точно такие же метрики-решения (16) – (18) и (21) – (23) (результат вполне ожидаемый), а проблема заполнения сферических полости и анти-полости остается не решенной.

Отметим, что в качестве исходных могут быть взяты не только метрики (6) и (7) или «перевернутые» метрики (43) и (44), но и метрики с комплексными компонентами метрического тензора

$$ds^{*(+2)} = e^{iv}c^2dt^2 - e^{i\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \text{ с сигнатурой (+---),} \quad (53)$$

и

$$ds^{*(-2)} = -e^{iv}c^2dt^2 + e^{i\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \text{ с сигнатурой (-+++).} \quad (54)$$

В случае исходной метрики (53), имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{i\lambda'}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= \frac{iv'}{2}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta, \\ \Gamma_{11}^0 &= i\frac{\lambda}{2}e^{i(\lambda-v)}, & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-i\lambda}, & \Gamma_{00}^1 &= \frac{v'}{2}e^{i(\lambda-v)}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= ctg\theta, & \Gamma_{00}^0 &= \frac{iv}{2}, \\ \Gamma_{10}^1 &= \frac{i\lambda}{2}, & \Gamma_{33}^1 &= -re^{-i\lambda}\sin^2\theta. \end{aligned}$$

При этом для стационарного случая (т.е. при $v = \text{const}$ и $\lambda = \text{const}$) вакуумное уравнение (1) представляется в виде системы комплексных уравнений

$$R_{00} = R_{11} = v'' + iv'^2 + 2v'/r = 0,$$

$$R_{22} = e^{-i\lambda} (i\lambda'/r - 1/r^2) + 1/r^2 = 0,$$

$$R_{33} = e^{-i\lambda} (iv'/r + 1/r^2) - 1/r^2 = 0,$$

$$v = -\lambda.$$

Решения этой системы уравнений

$$e^{-i\lambda} = e^{iv} = (1 + r_0/r), \quad e^{-i\lambda} = e^{iv} = (1 - r_0/r), \quad e^{-i\lambda} = e^{iv} = 1,$$

$$\text{или } \lambda = -v = i \ln(1 + r_0/r), \quad \lambda = -v = i \ln(1 - r_0/r), \quad \lambda = -v = i \ln 1.$$

Последовательно подставляя эти решения в исходную метрику (53) вновь получим три метрики (16) – (18).

Аналогичные действия с исходной метрикой (54) приводят к метрикам-решениям (21) – (23).

Таким образом, все попытки найти другие решения вакуумного уравнения (1) не привели к успеху.

5 Клетка и анти-клетка Шварцшильда – де Ситтера

Выше была предпринята попытка найти дополнительные решения вакуумного уравнения Эйнштейна (1) с целью решить проблему заполнения сферических полостей. Однако эти исследования лишь укрепили уверенность в том, что таких решений в уравнении (1) не содержится.

Поэтому рассмотрим решения вакуумного уравнения Эйнштейна с Λ -членом

$$R_{ik} \pm \Lambda g_{ik} = 0, \quad (55)$$

где $\Lambda = 3/r_a^2$, физический смысл радиуса r_a выяснится позже.

Имеется пять метрик-решений уравнения (55) с сигнатурой (+ – – –)

$$I \quad ds_1^{(+2)} = \left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (56)$$

$$II \quad ds_2^{(+2)} = \left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (57)$$

$$III \quad ds_3^{(+2)} = \left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (58)$$

$$IV \quad ds_4^{(+2)} = \left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (59)$$

$$i \quad ds_5^{(+2)} = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2); \quad (60)$$

и пять метрик-решений того же уравнения с сигнатурой (– + + +)

$$I' \quad ds_1^{(-2)} = -\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (61)$$

$$II' \quad ds_2^{(-2)} = -\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (62)$$

$$III' \quad ds_3^{(-2)} = -\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (63)$$

$$IV' \quad ds_4^{(-2)} = -\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (64)$$

$$i' \quad ds_5^{(-2)} = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (65)$$

Фридрих Коттлер впервые записал метрику (the Kottler metric) вида (58)

$$ds_{Kottler}^2 = \left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

в статье [10], которая вышла в марте 1918 г., практически сразу после опубликования ОТО Эйнштейна. В случае: $r_a = \infty$ и $r_b \neq 0$, метрика Коттлера (58) переходит в метрику Шварцшильда

$$ds_{\text{Schwarzschild}}^2 = \left(1 - \frac{r_b}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_b}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

В другом предельном случае: $r_a \neq \infty$ и $r_b = 0$ метрика Коттлера (58) переходит в метрику де Ситтера

$$ds_{\text{de Sitter}}^2 = \left(1 - \frac{r^2}{r_a^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

В третьем случае: $r_a = \infty$ и $r_b = 0$, метрика Коттлера (58) приобретает вид метрики Минковского

$$ds_{\text{Minkowski}}^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Поэтому метрики-решения (56) – (60) и (61) – (65) вакуумного уравнения Эйнштейна с Λ -членом (55) будем называть метриками Коттлера - де Ситтера - Шварцшильда (the Kottler - de Sitter- Schwarzschild solution) или сокращенно КдСШ-метриками.

Усредним метрики (56) – (60) с сигнатурой (+ ---) и метрики (61) – (65) с сигнатурой (- + +)

$$ds_{1-4}^{(+2)} = \frac{1}{4} (ds_1^{(+2)} + ds_2^{(+2)} + ds_3^{(+2)} + ds_4^{(+2)}).$$

$$ds_{1-4}^{(-2)} = \frac{1}{4} (ds_1^{(-2)} + ds_2^{(-2)} + ds_3^{(-2)} + ds_4^{(-2)}).$$

В результате получим усредненные метрики

$$ds_{1-4}^{(+2)} = c^2 dt^2 - g_{11}^{(+)}(r) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (66)$$

$$ds_{1-4}^{(-2)} = -c^2 dt^2 + g_{11}^{(-)}(r) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (67)$$

где

$$g_{11}^{(+)}(r) = g_{11}^{(-)}(r) = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} \right]. \quad (68)$$

Подставим компоненты $g_{ii}^{(+)}$ усредненной метрики (67) или компоненты $g_{ii}^{(-)}$ усредненной метрики (67) в выражения для относительного удлинения (32)

$$l_i^{(+)} = \sqrt{1 + \frac{g_{ii}^{(+)} - g_{ii0}^{(+)}}{g_{ii0}^{(+)}}} - 1, \quad l_i^{(-)} = \sqrt{1 + \frac{g_{ii}^{(-)} - g_{ii0}^{(-)}}{g_{ii0}^{(-)}}} - 1,$$

где компоненты $g_{ii0}^{(+)}$ берутся из не искривленной метрики (60), а компоненты $g_{ii0}^{(-)}$ берутся из не искривленной метрики (65).

В результате получим

$$l_r^{(\pm)} = \frac{\Delta r}{r} = \sqrt{g_{11}^{(\pm)}(r)} - 1 = \sqrt{\frac{1}{4} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{r_b}{r} - \frac{r^2}{r_a^2}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{r_b}{r} + \frac{r^2}{r_a^2}\right)} \right]} - 1, \quad (69)$$

$$l_t^{(\pm)} = 0, \quad l_\theta^{(\pm)} = 0, \quad l_\phi^{(\pm)} = 0.$$

График, например, функции $l_r^{(+)}$ (69) при $r_a = 60$ и $r_b = 1,5$, определяющей относительное удлинение вакуума в радиальном направлении, показан на рис. 5. Из этого графика видно, что получился практически полый шар (т.е. пространство де Ситтера) с уплотненными краями, внутри которого находится

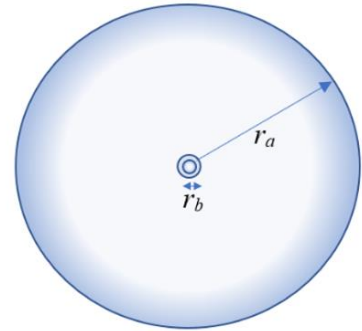
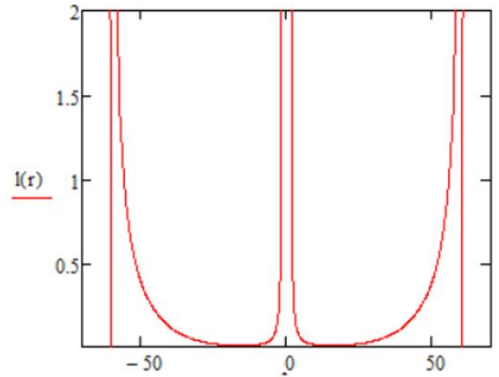


Рис. 5: График функции относительного удлинения $l_r^{(+)}$ (69), определяющей относительное удлинение вакуума в радиальном направлении

сферическая полость Шварцшильда, которая описывается метриками (16) – (18), точнее усредненной метрикой (25).

Действительно, если в метриках (56) – (58) устремить r_a к бесконечности ($r_a \rightarrow \infty$), т.е., например, предположить, что r_a – это радиус Вселенной, то в окрестности малой полости с радиусом $r_b = r_0$, который соизмерим, например с гравитационным радиусом «черной дыры», деформированное состояние вакуума будет описываться усредненной метрикой (25).

Показанное на рис. 5 вакуумное образование напоминает биологическую клетку с внешней оболочкой и внутренним ядрышком, поэтому будем называть его клеткой Шварцшильда - де Ситтера.

Продельвая аналогичные операции с метриками-решениями (61) – (65) с противоположной сигнатурой ($- + + +$), получим точно такую же, но противоположную анти-клетку Шварцшильда - де Ситтера.

Усреднение всех десяти метрик-решений (56) – (65) второго вакуумного уравнения (55) приводит к еще двум тривиальным (т.е. нулевым) псевдо-метрикам-решениям этого уравнения

$$\frac{1}{10} \left(\sum_{k=1}^5 ds_k^{(+)^2} + \sum_{k=1}^5 ds_k^{(-)^2} \right) = \pm 0 \cdot c^2 dt^2 \mp 0 \cdot dr^2 \mp 0 \cdot r^2 d\theta^2 \mp 0 \cdot r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Очевидно, что вакуумное уравнение Эйнштейна с Λ -членом (55), также не позволяет решить проблему заполнения «сферической полости Шварцшильда» и «сферической анти-полости Шварцшильда», которые в этом случае оказываются внутри соответственно пространства де Ситтера или пространства анти-де Ситтера.

6 Третье вакуумное уравнение Эйнштейна

Как было показано выше решения первого и второго вакуумных уравнений Эйнштейна (1) и (55) позволяют построить метрико-динамические модели взаимно-противоположной пары одиночных стабильных вакуумных образований, но не позволяют решить проблему заполнения сферических полости и анти-полости внутри этих образований. Кроме того, в этих уравнениях отсутствует потенциальная возможность для описания множества стабильных шарообразных объектов. В связи с этим предлагается рассмотреть возможность расширения вакуумного уравнения (55).

Напомним, что Эйнштейн для того, чтобы записать уравнение (55) воспользовался следующим свойством метрического тензора и тензора Эйнштейна:

$$\Lambda \nabla_j g_{ik} = \nabla_j \Lambda g_{ik} = 0, \quad \nabla_j (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}) = 0. \quad (70)$$

Однако очевидно, что равна нулю также ковариантная производная бесконечного ряда

$$\nabla_j (\Lambda_1 g_{ik} + \Lambda_2 g_{ik} + \Lambda_3 g_{ik} + \dots + \Lambda_\infty g_{ik}) = \Lambda_1 \nabla_j g_{ik} + \Lambda_2 \nabla_j g_{ik} + \dots + \Lambda_\infty \nabla_j g_{ik} = 0, \quad (71)$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_\infty$ – константы, которые могут принимать, как положительные ($\Lambda_i > 0$), так и отрицательные ($\Lambda_i < 0$) значения.

Используем тот же способ, который применил Эйнштейн для ввода Λ -члена в уравнение (55), и запишем расширенное вакуумное уравнение

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + \Lambda_1 g_{ik} + \Lambda_2 g_{ik} + \Lambda_3 g_{ik} + \dots + \Lambda_\infty g_{ik} = 0, \quad (72)$$

где согласно выражению $\Lambda_k = 3/r_{aj}^2$ или $-3/r_{aj}^2$, здесь r_{aj} – радиус j -го сферического образования.

Ковариантные и обычные частные производные тензора в левой части уравнения (72) равны нулю:

$$\nabla_j (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + g_{ik} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k) = \frac{\partial (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + g_{ik} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k)}{\partial x^j} = 0, \quad (73)$$

поэтому данное уравнение является выражением законов сохранения, также как вакуумные уравнения (1) и (55). Уравнение (72)

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + g_{ik} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k = 0$$

будем называть третьим расширенным вакуумным уравнением Эйнштейна.

Возможные решения уравнения (72) предложены в статье [11].

В следующих статьях предполагается показать, что расширенное вакуумное уравнение Эйнштейна (72) допускает описание множества взаимодействующих стабильных вакуумных образований разной величины. Не исключено, что это позволит решить проблемы, сформулированные в этой статье, и развить вакуумную теорию элементарных частиц и предложить корпускулярную космологическую модель.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная статья основана на убеждении автора в том, что в математике не бывает ничего лишнего, тем более в вакуумных уравнениях Эйнштейна (1) и (55)

$$R_{ik} = 0, \tag{1'}$$

$$R_{ik} \pm \Lambda g_{ik} = 0. \tag{55'}$$

В этих уравнениях сконцентрированы практически все основополагающие гносеологических принципы современной науки:

- 1) Принцип общей ковариантности (*т.е. независимость вида уравнения и инвариантов от выбора системы координат или системы отсчета; в сущности, тензорный характер уравнений*);
- 2) Принцип координатной инвариантности (*т.е. независимость законов физики от выбора системы координат*);
- 3) Принцип эквивалентности (*т.е. локальным искажениям, движениям и ускорениям ставятся в соответствие локальные искривленные системы отсчета*). Понятие «влияние силы» заменено на движение по инерции в искривленном пространстве-времени;
- 4) Принцип независимости скорости света от системы отсчета (*т.е. объединение пространства и времени в единый пространственно-временной континуум с метрикой вида $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$*);
- 5) Принцип причинности (*т.е. любое событие может оказать причинно-следственное влияние только на те события, которые происходят позже него, т.е. внутри окружности с радиусом не более $l = cdt$, где dt – промежуток времени между событиями*);
- 6) Принцип экстремума действия (*т.е. геодезические линии искривленного 4-мерного пространства экстремальны*);
- 7) Принцип симметрии (*т.е. условия не изменчивости, из которых вытекают законы сохранения*);
- 8) Принцип относительности (*т.е. в уравнения входят только относительные величины, включая время*).

Поэтому каждое решение вакуумных уравнений (1) и (55) имеет важное значение. Кроме того очевидно, что поскольку все эти решения определяют метрико-динамическое состояние одного и того же объема пространства, они должны быть объединены в единую систему.

В данной статье предпринята попытка показать, что усреднение (т.е. среднее арифметическое) метрик-решений вакуумных уравнений (1) и (55) не лишено смысла, и приводят к метрико-динамическим моделям взаимно противоположных стабильных корпускулярных вакуумных образований типа «сферическая полость Шварцшильда» (25) и «сферическая анти-полость Шварцшильда» (34), а также «клетка Шварцшильда - де Ситтера» (66) и «анти-клетка Шварцшильда - де Ситтера» (67).

Однако, как отметил математик Дэвид Рид, не исключено, что полезная информация может содержаться и в других видах усреднения метрик-решений вакуумных уравнений (1) и (55), например в их: среднем геометрическом, или среднем гармоническом, или среднем квадратичном, или среднем кубическом.

Усредненные метрики (25), (34), (66) и (67) имеют явные преимущества, т.к. в них нулевая компонента метрического тензора равна единице ($g_{00}^{(\pm)} = 1$). Это означает, что в этих моделях время t глобально, и в них отсутствуют временные сингулярности. Кроме того, в рамках усредненных моделей (25) и (34) легко решается проблема слабого Шварцшильд-подобного гравитационного потенциала (смотрите §3).

Однако пространственные сингулярности в усредняемых метриках (25), (34), (66) и (67) сохранились. В статье предложено связать безграничное растяжение эйнштейновского вакуума, возле сферической полости с радиусом $r_b = r_0$ (рис. 2 и 5), с тем, что в этой области вакуум начинает «закипать», т.е. сильно ветвится, закручиваться, сворачиваться и т.д. (смотрите §2).



Вместе с тем, во всех «выпуклых» и «вогнутых» стабильных метрико-динамических моделях, которые описываются усредненными метриками (25), (34), (66) и (67), имеются сферическая полость, из которой вытеснен эйнштейновский вакуум. Поэтому совершенно не понятно, чем эта полость заполнена? Кроме того, не ясно, что находится за верхней границей клетки Шварцшильда - де Ситтера с радиусом r_a (рис. 5)?

Очевидно, что метрико-динамические модели стабильных вакуумных образований, основанные на усредненных решениях вакуумных уравнений Эйнштейна (1) и (55) не полны. Поэтому предложено рассмотреть возможность применения расширенного вакуумного уравнения Эйнштейна (72)

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + g_{ik} \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k = 0.$$

Решение данного уравнения уже частично предложено в [11] и будет уточнено в следующих статьях.

На сегодняшний день экспериментально может быть проверена метрика (42)

$$ds_{(12)}^{(+2)} \approx \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g^2}{r_0^2}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (42')$$

у которой нулевая компонента $g_{(12)00}^{(+)}$ $= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ совпадает с нулевой компонентой метрики Шварцшильда (16)

$$ds_{(1)}^{(+2)} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (16')$$

Поэтому метрика (42) пригодна для описания всех известных слабых гравитационных эффектов.

Однако компонента $g_{(12)11}^{(+)} = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1}$ метрики (42) и компонента $g_{(1)11}^{(+)} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$ метрики (16) отличаются. Если предположить, что у планеты Земля $r_g = (r_{o1} - r_{o2})/2 \approx 0,9$ см и $r_0 \approx 1220$ км (смотрите §3), то разница между метриками (42) и (16) должна быть настолько значительной, что вполне может быть обнаружена экспериментально.

Однако наблюдаемыми в случае усредненной метрики (42) должны быть геодезические линии, которые определяются уравнением (смотрите § 1.1 в [15])

$$\frac{d^2 x^l}{ds^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (I_{ij}^{(+)} + i I_{ij}^{(-)}) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0,$$

где

$$I_{ij}^{(+)} = \frac{1}{2} g^{\mu(+)} \left(\frac{\partial g_{\mu i}^{(+)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\mu j}^{(+)}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}^{(+)}}{\partial x^\mu} \right) - \text{символы Кристоффеля, соответствующие метрике (38);}$$

$$I_{ij}^{(-)} = \frac{1}{2} g^{\mu(-)} \left(\frac{\partial g_{\mu i}^{(-)}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\mu j}^{(-)}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}^{(-)}}{\partial x^\mu} \right) - \text{символы Кристоффеля, соответствующие метрике (39).}$$

Даже если подтвердится, что радиус сферической полости r_0 у нашей планеты порядка 1000 км, то это будет весомым доказательством справедливости предлагаемой в этой статье гипотезы о возможности усреднения метрик-решений вакуумных уравнений Эйнштейна.

Случайно это, или Проявление Проведения, но в английском языке "Einstein's vacuum equation" имеет аббревиатуру EVE (Имя Праматери Человечества), а само вакуумное уравнение (55) описывает Утробу (т.е. Вместительность Мироздания). Другой перевод слова EVE – "Eve of the Omen".

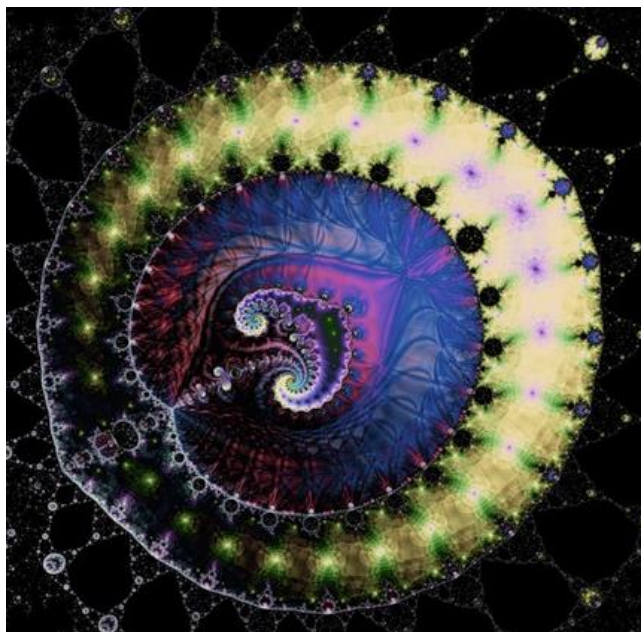


Рис. 8: Одна из разновидностей фрактала Мандельброта

БЛАГОДАРНОСТИ

Выражаю благодарность к.пс.н. Леви Т.С. за поддержку и оказание помощи. Конструктивные замечания и рекомендации математика Дэвида Рида (David Reid) позволили значительно улучшить статью. Вклад Д. Рида настолько значителен, что он вполне может быть включен в число соавторов. Полезное редактирование и большой объем расчетов относящиеся к §4 выполнил бакалавр МАИ из Колумбии Круз Перез Джулиан Артуро (Cruz Perez Julian Arturo).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Landau L.D., Lifshitz E.M. (1971). The Classical Theory of Fields / Course of theoretical physics, V. 2 Translated from the Russian by Hamermesh M. University of Minnesota – Pergamon Press Ltd. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Braunschweig, p. 387.
- [2] Stephani, H.; Kramer, D.; MacCallum, M.; Hoenselaers, C.; Herlt, E. (2003). Exact Solutions of Einstein's Field Equations. [Cambridge University Press](#). ISBN 0-521-46136-7.
- [3] Belinski, V.; Verdaguer, E. (2001). Gravitational solitons. Cambridge University Press. ISBN 0-521-80586-4.
- [4] Wheeler, J.A.; Misner, C.; Thorne, K.S. (1973). [Gravitation](#). W.H. Freeman & Co. ISBN 0-7167-0344-0.
- [5] Brown, Harvey (2005). [Physical Relativity](#). Oxford University Press. p. 164. ISBN 978-0-19-927583-0.
- [6] Malcolm, A.H. MacCallum (2013). ["Exact Solutions of Einstein's equations"](#). [Scholarpedia](#). 8 (12): 8584. doi:10.4249/scholarpedia.8584.

- [7] Bičák, J. (2000). "Selected Solutions of Einstein's Field Equations: Their Role in General Relativity and Astrophysics". Einstein's Field Equations and Their Physical Implications. Lecture Notes in Physics. Vol. 540. pp. 1–126. [arXiv:gr-qc/0004016](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0004016). doi:10.1007/3-540-46580-4_1. ISBN 978-3-540-67073-5. S2CID 119449917. An excellent modern survey.
- [8] Bonnor, W. B. (1992). "Physical interpretation of vacuum solutions of Einstein's equations. Part I. Time-independent solutions". Gen. Rel. Grav. **24** (5): 551–573. doi:10.1007/BF00760137. S2CID 122301194.
- [9] Sedov, L.I. (1994). "Continuum mechanics. T.1". – Moscow: Nauka, [in Russian]. (Available in English "A course in continuum mechanics", translation from the Russian, ed. by J. R. M. Radok).
- [10] Kottler, F. (1918) Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie// Annalen der Physik, Vol. 56, pp. 401-462. doi:10.1002/andp.19183611402.
- [11] Batanov-Gaukhman, M. (2023) "Multilayer and Multilevel Cosmological Models Based on Solutions of the Extended Einstein Field Equations" Doi: 10.20944/preprints202302.0353.v1, <https://www.preprints.org/manuscript/202302.0353/v1>
- [12] Батанов-Гаухман, М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть I. Алгебра стигнатур. Препринты 2023, 2023060765. <https://doi.org/10.20944/preprints202306.0765.v3>. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part I. Algebra of Stignatures. Avances en Ciencias e Ingeniería, 14 (1), 1-26, <https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-1-ano-2023-articulo-1/>; and Preprints, 2023060765. <https://doi.org/10.20944/preprints202306.0765.v3>.
- [13] Батанов-Гаухман, М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть II. Алгебра сигнатур. Препринты, 2023070716. <https://doi.org/10.20944/preprints202307.0716.v1>. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part II. Algebra of Signatures. Avances en Ciencias e Ingeniería, 14 (1), 27-55, <https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-1-ano-2023-articulo-2/>; and Preprints, 2023070716, <https://doi.org/10.20944/preprints202307.0716.v1>.
- [14] Батанов-Гаухман, М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть III. Искривленная область вакуума. Препринты 2023, 2023080570. <https://doi.org/10.20944/preprints202308.0570.v4>. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part III. Curved Vacuum Area. Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 14 nro 2 año 2023 Artículo 5, <https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-2-ano-2023-articulo-5/>; and Preprints 2023, 2023080570. <https://doi.org/10.20944/preprints202308.0570.v4>.
- [15] Батанов-Гаухман, М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть IV. Динамика вакуумных слоев. Available in English: Batanov-Gaukhman, M., (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part IV: Dynamics of Vacuum Layers. Preprints 2023, 2023, 101244. <https://doi.org/10.20944/preprints202310.1244.v3>.

Приложение 1

П.1 Расчет символов Кристоффеля в случае перевернутой метрики

Рассмотрим перевернутую исходной метрики (43)

$$ds^{*(-)2} = e^{-\nu}c^2 dt^2 - e^{-\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \text{ with signature } (+---), \quad (43')$$

этой метрике ненулевые компоненты метрического тензора равны

$$g_{00} = e^{-\nu}, \quad g_{11} = -e^{-\lambda}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta,$$

и их контравариантные компоненты равны

$$g^{00} = e^{\nu}, \quad g^{11} = -e^{\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2}\theta.$$

Рассчитаем не равные нулю символы Кристоффеля (3)

$$\Gamma_{ik}^p = \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \quad (\text{П.1.2})$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{10}(\dots) + \frac{1}{2} g^{11}(\dots) + \frac{1}{2} g^{12}(\dots) + \frac{1}{2} g^{13}(\dots) \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11}(\dots) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = -\frac{e^\lambda}{2} \left(\frac{\partial -e^\lambda}{\partial r} \right) = -\frac{\lambda'}{2} \\
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{\lambda'}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} g^{00}(\dots) + \frac{1}{2} g^{01}(\dots) + \frac{1}{2} g^{02}(\dots) + \frac{1}{2} g^{03}(\dots) \\
\Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} g^{00}(\dots) = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} \right) \\
\Gamma_{10}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = \frac{e^v}{2} \left(\frac{\partial e^{-v}}{\partial r} \right) = \frac{e^v e^{-v}}{2} \left(\frac{\partial -v}{\partial r} \right) = -\frac{v'}{2} \\
\Gamma_{10}^0 &= -\frac{v'}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{20}(\dots) + \frac{1}{2} g^{21}(\dots) + \frac{1}{2} g^{22}(\dots) + \frac{1}{2} g^{23}(\dots) \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22}(\dots) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2} g^{22} \left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} g^{22} \left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} \right) = \frac{-r^{-2}}{2} \left(-\frac{\partial -r^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} \right) = -\sin \theta \cos \theta \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{00}(\dots) + \frac{1}{2} g^{01}(\dots) + \frac{1}{2} g^{02}(\dots) + \frac{1}{2} g^{03}(\dots) \\
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{00}(\dots) = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) \\
\Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} \left(-\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) = \frac{e^v}{2} \left(-\frac{\partial -e^{-\lambda}}{\partial ct} \right) = \frac{e^{v-\lambda}}{2} \left(\frac{\partial -\lambda}{\partial ct} \right) = -\frac{\lambda}{2} e^{v-\lambda} \\
\Gamma_{11}^0 &= -\frac{\lambda}{2} e^{v-\lambda}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{10}(\dots) + \frac{1}{2} g^{11}(\dots) + \frac{1}{2} g^{12}(\dots) + \frac{1}{2} g^{13}(\dots) \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11}(\dots) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \frac{-e^\lambda}{2} \left(-\frac{\partial -r^2}{\partial r} \right) = -r e^\lambda \\
\Gamma_{22}^1 &= -r e^\lambda.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{10}(\dots) + \frac{1}{2} g^{11}(\dots) + \frac{1}{2} g^{12}(\dots) + \frac{1}{2} g^{13}(\dots) \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11}(\dots) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) \\
\Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right) = \frac{-e^\lambda}{2} \left(-\frac{\partial e^{-v}}{\partial r} \right) = -\frac{e^{\lambda-v}}{2} \left(\frac{\partial -v}{\partial r} \right) = -\frac{v'}{2} e^{\lambda-v} \\
\Gamma_{00}^1 &= -\frac{v'}{2} e^{\lambda-v}.
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{ik}^p = \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{20}(\dots) + \frac{1}{2} g^{21}(\dots) + \frac{1}{2} g^{22}(\dots) + \frac{1}{2} g^{23}(\dots)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22}(\dots) = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = \frac{-r^{-2}}{2} \left(\frac{\partial -r^2}{\partial r} \right) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}.$$

$$\Gamma_{ik}^p = \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{30}(\dots) + \frac{1}{2} g^{31}(\dots) + \frac{1}{2} g^{32}(\dots) + \frac{1}{2} g^{33}(\dots)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{33}(\dots) = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} \right)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) = \frac{-r^{-2} \sin^{-2} \theta}{2} \left(-\frac{\partial -r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} \right) = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}.$$

$$\Gamma_{ik}^p = \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{30}(\dots) + \frac{1}{2} g^{31}(\dots) + \frac{1}{2} g^{32}(\dots) + \frac{1}{2} g^{33}(\dots)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{33}(\dots) = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} \right)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{2} r^{-2} \sin^{-2} \theta \left(\frac{\partial -r^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2} \sin^{-2} \theta 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \operatorname{tg} \theta$$

$$\Gamma_{23}^3 = \operatorname{tg} \theta.$$

$$\Gamma_{ik}^p = \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00}(\dots) + \frac{1}{2} g^{01}(\dots) + \frac{1}{2} g^{02}(\dots) + \frac{1}{2} g^{03}(\dots)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00}(\dots) = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} e^v \left(\frac{\partial e^{-v}}{\partial ct} \right) = -\frac{\dot{v}}{2}$$

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{\dot{v}}{2}.$$

$$\Gamma_{ik}^p = \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right)$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{10}(\dots) + \frac{1}{2} g^{11}(\dots) + \frac{1}{2} g^{12}(\dots) + \frac{1}{2} g^{13}(\dots)$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\dots) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^1} \right)$$

$$\Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x^0} \right) = \frac{1}{2} - e^\lambda \left(\frac{\partial -e^{-\lambda}}{\partial ct} \right) = -\frac{\dot{\lambda}}{2}$$

$$\Gamma_{10}^1 = -\frac{\dot{\lambda}}{2}.$$

$$\Gamma_{ik}^p = \frac{1}{2} g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{10}(\dots) + \frac{1}{2} g^{11}(\dots) + \frac{1}{2} g^{12}(\dots) + \frac{1}{2} g^{13}(\dots)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11}(\dots) = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(-\frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2} - e^\lambda \left(-\frac{\partial -r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} \right) = -r e^\lambda \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r e^\lambda \sin^2 \theta.$$

Соберем результаты вычислений:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -\frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= -\frac{v'}{2}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta, \\
\Gamma_{11}^0 &= -\frac{\lambda}{2}e^{v-\lambda}, & \Gamma_{22}^1 &= -re^\lambda, & \Gamma_{00}^1 &= -\frac{v'}{2}e^{\lambda-v}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= ctg\theta, & \Gamma_{00}^0 &= -\frac{v}{2}, \\
\Gamma_{10}^1 &= -\frac{\lambda}{2}, & \Gamma_{33}^1 &= -re^\lambda\sin^2\theta.
\end{aligned} \tag{П.1.2}$$

Аналогичные символы Кристоффеля получаются при использовании компонент метрического тензора из исходной перевернутой метрики (44) с противоположной сигнатурой

$$ds^{*(+2)} = -e^{-v}c^2dt^2 + e^{-\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \text{ with signature } (- + + +).$$

Проверим на нескольких примерах, что остальные символы Кристоффеля равны нулю:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2}g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2}g^{10}(\dots) + \frac{1}{2}g^{11}(\dots) + \frac{1}{2}g^{12}(\dots) + \frac{1}{2}g^{13}(\dots) \\
\Gamma_{31}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\dots) = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^1} \right) = 0 \\
\Gamma_{31}^1 &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2}g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{32}^1 &= \frac{1}{2}g^{10}(\dots) + \frac{1}{2}g^{11}(\dots) + \frac{1}{2}g^{12}(\dots) + \frac{1}{2}g^{13}(\dots) \\
\Gamma_{32}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\dots) = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) = 0 \\
\Gamma_{32}^1 &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2}g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{32}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\dots) + \frac{1}{2}g^{01}(\dots) + \frac{1}{2}g^{12}(\dots) + \frac{1}{2}g^{13}(\dots) \\
\Gamma_{32}^1 &= \frac{1}{2}g^{00}(\dots) = \frac{1}{2}g^{00} \left(\frac{\partial g_{02}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{32}}{\partial x^0} \right) = 0 \\
\Gamma_{32}^1 &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2}g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{30}(\dots) + \frac{1}{2}g^{31}(\dots) + \frac{1}{2}g^{32}(\dots) + \frac{1}{2}g^{33}(\dots) \\
\Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\dots) = \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} \right) = 0 \\
\Gamma_{32}^1 &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2}g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{31}^2 &= \frac{1}{2}g^{20}(\dots) + \frac{1}{2}g^{21}(\dots) + \frac{1}{2}g^{22}(\dots) + \frac{1}{2}g^{23}(\dots) \\
\Gamma_{31}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\dots) = \frac{1}{2}g^{22} \left(\frac{\partial g_{21}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{31}}{\partial x^2} \right) = 0 \\
\Gamma_{31}^2 &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ik}^p &= \frac{1}{2}g^{p\mu} \left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\mu} \right) \\
\Gamma_{20}^3 &= \frac{1}{2}g^{30}(\dots) + \frac{1}{2}g^{31}(\dots) + \frac{1}{2}g^{32}(\dots) + \frac{1}{2}g^{33}(\dots) \\
\Gamma_{20}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(\dots) = \frac{1}{2}g^{33} \left(\frac{\partial g_{30}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{23}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{20}}{\partial x^3} \right) = 0 \\
\Gamma_{20}^3 &= 0.
\end{aligned}$$

П.2 Система вакуумных уравнений Эйнштейна без Λ -члена в случае перевернутой метрики

Запишем правые части первого вакуумного уравнения Эйнштейна (1)

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^l = 0, \quad (\text{П.2.1})$$

для стационарного случая, т.е. когда все компоненты метрического тензора перевернутой метрики (43) не зависят от времени t .

Поскольку при этом ν и λ не зависят от времени, из символов Кристоффеля (П.1.2) остаются не равными нулю

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{\lambda'}{2}, & \Gamma_{10}^0 &= -\frac{\nu'}{2}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma_{22}^1 &= -re^\lambda, & \Gamma_{00}^1 &= -\frac{\nu'}{2}e^{\lambda-\nu}, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg}\theta, & \Gamma_{33}^1 &= -re^\lambda\sin^2\theta. \end{aligned} \quad (\text{П.2.2})$$

Подставляя символы Кристоффеля (П.2.2) в уравнение (П.2.1), в результате для стационарного случая получим

$$\begin{aligned} R_{11} = R_{00} &= \frac{\partial \Gamma_{00}^1}{\partial x^1} + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1 = 0, \\ R_{11} = R_{00} &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left(-\frac{\nu'}{2} e^{\lambda-\nu} \right) + \left(-\frac{\nu'}{2} e^{\lambda-\nu} \right) \left[-\frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{\nu'}{2} \right] = 0, \\ R_{11} = R_{00} &= -\frac{\nu''}{2} e^{\lambda-\nu} - \frac{\nu'}{2} e^{\lambda-\nu} (\lambda' - \nu') + \left(-\frac{\nu'}{2} e^{\lambda-\nu} \right) \left[\nu' + \frac{2}{r} \right] = 0, \\ R_{11} = R_{00} &= -e^{\lambda-\nu} \left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{2} (\lambda' - \nu') + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu'}{r} \right] = 0, \\ R_{11} = R_{00} &= \nu'' - 2\nu'^2 + \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} = 0, \\ R_{11} = R_{00} &= \nu'' - \nu'^2 + \frac{2\nu'}{r} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.3})$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x^2} + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 = 0, \\ R_{22} &= \frac{\partial}{\partial x^1} (-re^\lambda) - \frac{\partial}{\partial x^2} (\cot\theta) + (-re^\lambda) \left[-\frac{\nu'}{2} - \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right] - \cot^2\theta = 0, \\ R_{22} &= -e^\lambda - re^\lambda \lambda' + \csc^2\theta - \cot^2\theta = 0, \\ R_{22} &= -e^\lambda (1 + r\lambda') + 1 = 0, \\ R_{22} &= e^\lambda \left(\frac{\lambda'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.2.4})$$

$$R_{33} = \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x^1} + \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 = 0,$$

$$R_{33} = \frac{\partial}{\partial x^1} (-r \sin^2 \theta e^\lambda) + \frac{\partial}{\partial x^2} (-\sin \theta \cos \theta) + (-r \sin^2 \theta e^\lambda) \left[-\frac{v'}{2} - \frac{\lambda'}{2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right] - \cot \theta (-\sin \theta \cos \theta) = 0,$$

$$R_{33} = -\sin^2 \theta e^\lambda - r \sin^2 \theta e^\lambda \lambda' - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 0,$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta [e^\lambda(-1 - r\lambda') + 1] = 0,$$

$$R_{33} = e^\lambda(v'r - 1) + 1,$$

$$R_{33} = e^\lambda \left(\frac{v'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0.$$

(II.2.5)