1.4.5. «Цветные» кватернионы

Проблемой 4-мерных чисел занимались Л. Эйлер (1707 – 1783), Ж. Лагранж (1736 – 1813), С. Пуассон (1781 – 1840). С. В. Ковалевская (1850 – 1891), Ж. Пуанкаре (1854 – 1912), К. Якоби (1804 – 1851). Но разрешить эту проблему удалость лишь У. Гамильтону (1805 – 1865).

Ирландский математик Уильям Гамильтон (1805 – 1865) поставил перед собой задачу отыскать аналог комплексным числам, но интерпретируемых уже не на двумерном многообразии, а в трехмерном пространстве. Он искал такие числа в течение 15 лет. Этот поиск превратился для Гамильтона в навязчивую идею. Существует предание, что его домашние каждое утро спрашивали за завтраком: "Ну как, нашел ты решение своей задачи?" [8].

В 1843 г. во время прогулки Гамильтону пришла счастливая мысль, что при создании системы многомерных чисел нужно отказаться от требования коммутативности законов умножения, столь очевидного для алгебры действительных и комплексных чисел. У таких чисел произведение должно зависеть от порядка сомножителей. Вторая идея, которая посетила Гамильтона была связана с переходом от 3-мерных чисел к 4-мерым. Такие 4-мерые числа, подчиняющиеся алгебре с некоммутативным законом умножения, Гамильтон назвал кватернионами. Ныне кватернионами называют гиперкомплексные числа

$$z = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3, \qquad (1.4.45)$$

где i, j, k – мнимые единицы, образующие некоммутативную алгебру:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ и } ij - ji = jk - kj = ki - ik = 0. \qquad (1.4.46)$$

В кватернионе выделяют скалярную x_0 и векторную $\mathbf{v}_x = \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3$ части. Произведением двух кватернионов является обычный кватернион

$$z_x z_y = (-x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3) + [\mathbf{i}\,(x_2 y_3 - x_3 y_2) + \mathbf{j}\,(x_3 y_1 - x_1 y_3) + \mathbf{k}\,(x_1 y_2 - x_2 y_1)].$$

В современной теории спиноров кватернионы являются одним из разновидностей клиффордовых агрегатов [26]:

$$\mathbf{a} = a_0 + \mathbf{e}_1 a_1 + \mathbf{e}_2 a_2 + \mathbf{e}_3 a_3\,, \qquad (1.4.47)$$

где a_i – вещественные числа;
$\mathbf{e}_i$ *– орты, подчиняющиеся правилу умножения (1.4.46), или в более компактном виде*

$$1\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i 1, \qquad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = -\delta_{ik}\, 1 + \varepsilon_{ikn}\, \mathbf{e}_n\,, \qquad (1.4.48)$$

где δ_{ik} и ε_{ikn} – символы Кронекера и Леви – Чивиты (i, k, n = 1,2,3).

В современных теориях в основном применяются два вида кватернионов: собственно сам кватернион

$$z = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3, \qquad stign\ \{+ + + +\}$$

и сопряженный ему кватернион

$$z^* = x_0 - kx_3 - jx_2 - ix_1, \qquad stign\ \{+ - - -\}$$

Алсигна делает следующий шаг и рассматривает не только эти два типа гамильтоновых кватернионов, но и кватернионы со всеми 16-ю возможными стигнатурами:

$z_1 = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \quad \{+ + + +\}$	$\{- - - -\} \quad z_9 = -x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3$
$z_2 = -x_0 - ix_1 - jx_2 + kx_3 \quad \{- - - +\}$	$\{+ + + -\} \quad z_{10} = x_0 + ix_1 + jx_2 - kx_3$
$z_3 = x_0 - ix_1 - jx_2 + kx_3 \quad \{+ - - +\}$	$\{- + + -\} \quad z_{11} = -x_0 + ix_1 + jx_2 - kx_3$
$z_4 = -x_0 - ix_1 + jx_2 - kx_3 \quad \{- - + -\}$	$\{+ + - +\} \quad z_{12} = x_0 + ix_1 - jx_2 + kx_3$
$z_5 = x_0 + ix_1 - jx_2 - kx_3 \quad \{+ + - -\}$	$\{- - + +\} \quad z_{13} = -x_0 - ix_1 + jx_2 + kx_3$
$z_6 = -x_0 + ix_1 - jx_2 - kx_3 \quad \{- + - -\}$	$\{+ - + +\} \quad z_{14} = x_0 - ix_1 + jx_2 + kx_3$
$z_7 = x_0 - ix_1 + jx_2 - kx_3 \quad \{+ - + -\}$	$\{- + - +\} \quad z_{15} = -x_0 + ix_1 - jx_2 + kx_3$
$z_8 = -x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \quad \{- + + +\}$	$\{+ - - -\} \quad z_{16} = x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3$
(1.4.49)	(1.4.50)

По аналогии с «цветными» фотонами (1.2.79) – (1.2.80), кватернионы (1.4.49) – (1.4.50) с 16-тью различными стигнатурами будем называть «цветными» кватернионами.

Прямым вычислением легко убедиться, что сумма всех 16 типов «цветных» кватернионов (1.4.49) – (1.4.50) равна нулю

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8 + z_9 + z_{10} + z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{15} + z_{16} = 0,$$

(1.4.51)

т. е. удовлетворяет вакуумному условию.

Эквивалентная ситгнатурная запись выражения (1.4.51) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\{++-+\} + \{+---\} + \{++--\} + \{+--+\} + \\
&+\{++++\} + \{+-+-\} + \{+++-\} + \{+-++\} + \\
&+\{-+-+\} + \{----\} + \{-+--\} + \{---+\} + \\
&+\{-+++\} + \{--+-\} + \{-++-\} + \{--++\} = \{0000\}.
\end{aligned} \qquad (1.4.52)$$

Аппарат «цветных» кватернионов, учитывающий стигнатурную полноту, оказывается полностью сбалансированным относительно нуля. Это обстоятельство и позволяет применить его к постижению свойств плотной «пустоты» (вакуума).

«Цветные» кватернионы (1.4.49) – (1.4.50) могут выражаться друг через друга посредством базисных величин *i, j, k.* Например, кватернион

$$q^* = z_{16} = x_0 - ix_1 - jx_2 - kx_3, \text{ со стигнатурой } \{+---\}$$

может быть выражен через кватернион

$$q = z_1 = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3, \text{ со стигнатурой } \{++++\}$$

следующим образом [49]:

$$q^* = -\tfrac{1}{2}\,(q + iqi + jqj + kqk). \qquad (1.4.52а)$$

Считается, что аналитическая связь (1.4.52а) кватерниона q с его комплексно сопряженным кватернионом q^* обедняет кватернионную алгебраическую структуру по сравнению с алгеброй комплексных чисел, из-за отсутствия «голоморфной независимости» между ними [49].

С точки зрения Алсигны, напротив, возможность выражать «цветные» кватернионы друг через друга – это их колоссальное достоинство, которое в дальнейшем позволит использовать эти свойства при описании различных замкнутых пространственных узловых структур.

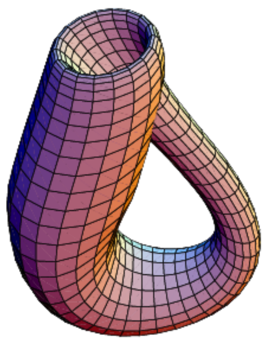

Рис. 1.4.2. «Бутылка Клейна» – одна из разновидностей замкнутой пространственной узловой структуры, www.wikipedia.org

Любой «цветной» кватернион, например:

$$q = a + bi + cj + dk, \tag{1.4.53}$$

можно представить в следующем виде [25]

$$q = x + yj = x + j\bar{y}, \tag{1.4.54}$$

где

$$x = a + bi, \quad y = c + di.$$

Эти элементы образуют 2×2-матрицу (спинтензор):

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}, \tag{1.4.55}$$

детерминант которой равен соответствующей квадратичной форме

$$\begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |x|^2 + |y|^2. \tag{1.4.56}$$

В случае $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ *данное выражение задает 3-мерную единичную сферу в четырехмерном пространстве. А в другом случае* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$ *оно описывает распространение одного из 16-ти разновидностей «цветных» лучей света.*

Еще раз отметим, что матрица (1.4.55) отражает свойства бинарно-перекрестной записи Непроизносимого Имени ТВОРЦА

$$\begin{matrix} \text{י} & \text{ה} \\ \text{ה} & \text{ו} \end{matrix} \equiv \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}, \tag{1.4.57}$$

См. выражение (0.26) в [18].

Представление кватернионов (1.4.49) – (1.4.50) в виде 2×2-матриц, например в виде матрицы (1.4.55), позволяет каждому из них поставить в соответствие один из типов аффиноров, приведенных в табл. 1.4.2.