1.4.6. Бикватернионы и «цветные» бикватернионы

Бикватернионы были введены английским математиком У. Клиффордом [47] в 1873 г., который попытался применить идеи У. Гамильтона для развития механики твердого тела, элементами которой являются так называемые «моторы» и «винты». Данное направление исследований развивали Х. Кокс, А. Бухгейм, Грасман, Е. Штуди, А.П. Кательников и многие др. исследователи.

Бикватернион (дуальный кватернион) – это гиперкомплексное число, имеющее следующий вид [33]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + s\mathbf{a^0} = a_0\,\mathbf{1} + a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\,\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3 + s\,(a_0{}^0\mathbf{1} + a_1{}^0\boldsymbol{i}_1 + a_2{}^0\boldsymbol{i}_2 + a_3{}^0\boldsymbol{i}_3). \quad (1.4.57а)$$

Бикватернион (1.4.57) может быть представлен в виде

$$\mathbf{A} = \mathrm{A}_0\,\mathbf{1} + \mathrm{A}_1\,\boldsymbol{i}_1 + \mathrm{A}_2\,\boldsymbol{i}_2 + \mathrm{A}_3\,\boldsymbol{i}_3 = \quad (1.4.57б)$$

$$= (a_0 + s\,a_0{}^0)\,\mathbf{1} + (a_1 + s\,a_1{}^0)\,\boldsymbol{i}_1 + (a_2 + s\,a_2{}^0)\,\boldsymbol{i}_2 + (a_3 + s\,a_3{}^0)\,\boldsymbol{i}_3,$$

где $\mathrm{A}_j = a_j + s\,a_j{}^0$ $(j = 0, 1, 2, 3)$.

Символ s может принимать одно из трех возможных значений:

$$\begin{aligned} s^2 &= +1 && \text{– для эллиптического пространства;} \\ s^2 &= \ \ 0 && \text{– для параболического пространства;} \\ s^2 &= -1 && \text{– для гиперболического пространства.} \end{aligned} \quad (1.4.57в)$$

Согласно классификации А. П. Кательникова [33], в зависимости от значения квадрата символа s бикватернион (1.4.57а) называется эллиптическим, параболическим или гиперболическим.

В отношении сложнейших вращательных (винтовых) процессов в вакууме Алсигна расширяет представления о бикватернионах в двух отношениях. Во-первых, вводятся в рассмотрение 16 видов «цветных» бикватернионов с различными стигнатурами:

$$\mathbf{A}^{\{++++\}} = a_0\,\mathbf{1} + a_1\boldsymbol{i}_1 + a_2\,\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3 + s\,(a_0{}^0\mathbf{1} + a_1{}^0\boldsymbol{i}_1 + a_2{}^0\boldsymbol{i}_2 + a_3{}^0\boldsymbol{i}_3);$$

$$\mathbf{A}^{\{---+\}} = -\,a_0\mathbf{1} - a_1\boldsymbol{i}_1 - a_2\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3 + s\,(-a_0{}^0\mathbf{1} - a_1{}^0\boldsymbol{i}_1 - a_2{}^0\boldsymbol{i}_2 + a_3{}^0\boldsymbol{i}_3);$$

$$\mathbf{A}^{\{+--+\}} = a_0\,\mathbf{1} - a_1\boldsymbol{i}_1 - a_2\,\boldsymbol{i}_2 + a_3\boldsymbol{i}_3 + s\,(a_0{}^0\mathbf{1} - a_1{}^0\boldsymbol{i}_1 - a_2{}^0\boldsymbol{i}_2 + a_3{}^0\boldsymbol{i}_3); \quad (1.4.57г)$$

………………………………………………………………………

$$\mathbf{A}^{\{+---\}} = a_0\,\mathbf{1} - a_1\boldsymbol{i}_1 - a_2\,\boldsymbol{i}_2 - a_3\boldsymbol{i}_3 + s\,(a_0{}^0\mathbf{1} - a_1{}^0\boldsymbol{i}_1 - a_2{}^0\boldsymbol{i}_2 - a_3{}^0\boldsymbol{i}_3).$$

Во-вторых, Алсигна рассматривает не три, а четыре вида символов:

$$\begin{matrix} s^2 = +1, & s^2 = -\,1, \\ s^2 = -\,0, & s^2 = +\,0. \end{matrix} \quad (1.4.57д)$$

образующих различные варианты 2×2-матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$