

1.4.7. «Цветная» алгебра Клиффорда

Все наборы четырех спиновых матриц $\sigma_i^{(\dots)}$ каждого из 16-ти аффиноров, представленных в табл. 1.4.2, удовлетворяет условиям

$$\sigma_i^{(\dots)}\sigma_j^{(\dots)} + \sigma_j^{(\dots)}\sigma_i^{(\dots)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ при } i \neq j; \\ 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ при } i = j, \end{cases} \quad (1.4.58)$$

т. е. являются образующими алгебры Клиффорда.

Поэтому следует рассмотреть 16 «цветных» алгебр Клиффорда, соответствующих 16-ти типам аффиноров с соответствующими стигнатурами.

Можно строить единую алгебру Клиффорда на множестве 16-мерных комплексных чисел. Это будет обсуждаться в последующих главах данной книги.

Из аффиноров, сведенных в табл.1.4.2, видно, что в развиваемой «цветной» теории имеет место базис из 16-ти типов спиновых матриц $\sigma_i^{(\dots)} = \sigma_{ij}$ (или ортов e_{ij}):

$$\begin{aligned} e_{00} \rightarrow \sigma_{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & e_{10} \rightarrow \sigma_{10} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & e_{20} \rightarrow \sigma_{20} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & e_{30} \rightarrow \sigma_{30} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ e_{01} \rightarrow \sigma_{01} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & e_{11} \rightarrow \sigma_{11} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & e_{21} \rightarrow \sigma_{21} &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} & e_{31} \rightarrow \sigma_{31} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ e_{02} \rightarrow \sigma_{02} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & e_{12} \rightarrow \sigma_{12} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & e_{22} \rightarrow \sigma_{22} &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & e_{32} \rightarrow \sigma_{32} &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\ e_{03} \rightarrow \sigma_{03} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & e_{13} \rightarrow \sigma_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & e_{23} \rightarrow \sigma_{23} &= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} & e_{33} \rightarrow \sigma_{33} &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.4.59)$$

которые будем называть спиновыми матрицами Паули-Кэли.

Шестнадцать ортов (или спиновых матриц) (1.4.59) образуют группу по операции матричного умножения.

Сумма всех 16-ти спиновых матриц Паули-Кэли (1.4.59) удовлетворяет вакуумному условию, т. е. равна нулевой матрице

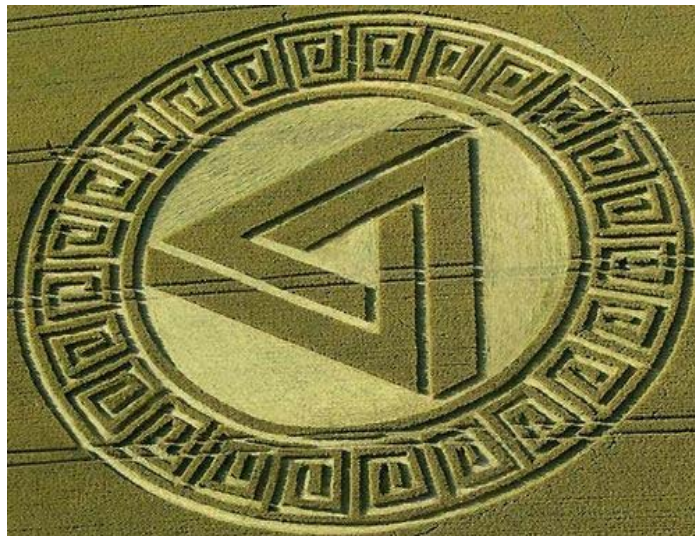
$$\sum_{i=1}^{16} \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4.60)$$

поэтому полный набор этих матриц можно рассматривать как сбалансированный относительно нуля спин-базис.

Различные варианты сумм спиновых матриц (1.4.59) приводят к матрицам Адамара (1.2.23), например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это говорит о том, что спиновые матрицы могут быть тесно связаны с Кодированием Разумных Процессов Природы.



Круги на полях [34]

Возведем спиновые матрицы (1.4.59) в квадрат:

$$\begin{aligned}
 e_{00}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1; & e_{10}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \\
 e_{20}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -1 & e_{30}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -1 \\
 e_{01}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1; & e_{11}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -1 \\
 e_{21}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -1 & e_{31}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \\
 e_{02}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1; & e_{12}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -1 \\
 e_{22}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -1 & e_{32}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \\
 e_{03}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1; & e_{13}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \\
 e_{23}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -1 & e_{33}^2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow -1
 \end{aligned}$$

(1.4.61)

откуда следует существование двух видов базисных векторов, модули которых равны

$$|\mathcal{e}_{00}\rangle = |\mathcal{e}_{01}\rangle = |\mathcal{e}_{02}\rangle = |\mathcal{e}_{03}\rangle = |\mathcal{e}_{10}\rangle = |\mathcal{e}_{31}\rangle = |\mathcal{e}_{32}\rangle = |\mathcal{e}_{13}\rangle = \sqrt{1}, \quad (1.4.62)$$

$$|\mathcal{e}_{20}\rangle = |\mathcal{e}_{21}\rangle = |\mathcal{e}_{22}\rangle = |\mathcal{e}_{23}\rangle = |\mathcal{e}_{11}\rangle = |\mathcal{e}_{30}\rangle = |\mathcal{e}_{12}\rangle = |\mathcal{e}_{33}\rangle = \sqrt{-1}. \quad (1.4.63)$$

Восемь $|\mathbf{e}_i\rangle = -1^{1/2}$ и восемь $|\mathbf{e}_i\rangle = 1^{1/2}$ – в среднем полная сбалансированность относительно нуля.

Таким образом, модули ортов e_{ij} (1.4.59) могут принимать одно из двух значений

$$|e_{ij}^p| = e_{ij} = \begin{cases} \sqrt{1} \\ \sqrt{-1} \end{cases}. \quad (1.4.64)$$

Математический аппарат «Алгебры сигнатур», развиваемый для описания пространства, состоящего из «пустых» точек, постоянно сохраняет высокую симметричность относительно исходной «отсутственности». Без нарушения этой симметрии «пустота» никоим образом не может проявить себя. Один из вариантов возможного нарушения исходной идеологии приведен ниже.

Уравнение «золотого сечения»

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

см. (0.98) в [18], как известно, имеет корни

$$x^{(1)} = \varphi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618034\dots, \quad x^{(2)} = \varphi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -0,618034\dots \quad (1.4.65)$$

Произведение этих корней равно единице

$$\varphi_1 \cdot \varphi_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{4}{4} = 1. \quad (1.4.66)$$

Было бы интересно рассмотреть алгебру Клиффорда, в которой модули мнимых единиц равнялись бы не корню из единицы и минус единицы, а корни «золотого уравнения» (1.4.65). Например:

$$\begin{aligned} e_{00}^{(1)} = e_{01}^{(1)} = e_{02}^{(1)} = e_{03}^{(1)} = e_{04}^{(1)} = e_{05}^{(1)} = e_{06}^{(1)} = e_{07}^{(1)} = e_{08}^{(1)} = \\ = e_{09}^{(1)} = e_{10}^{(1)} = e_{11}^{(1)} = e_{12}^{(1)} = e_{13}^{(1)} = e_{14}^{(1)} = e_{15}^{(1)} = e_{16}^{(1)} = \varphi_1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} e_{00}^{(2)} = e_{01}^{(2)} = e_{02}^{(2)} = e_{03}^{(2)} = e_{04}^{(2)} = e_{05}^{(2)} = e_{06}^{(2)} = e_{07}^{(2)} = e_{08}^{(2)} = \\ = e_{09}^{(2)} = e_{10}^{(2)} = e_{11}^{(2)} = e_{12}^{(2)} = e_{13}^{(2)} = e_{14}^{(2)} = e_{15}^{(2)} = e_{16}^{(2)} = \varphi_2. \end{aligned}$$

Тогда при произведении клиффордовых агрегатов, например:

Алгебра сигнатур

$$ds' = \mathbf{e}_{00}^{(1)} dx_0' + \mathbf{e}_{11}^{(1)} dx_1' + \mathbf{e}_{22}^{(1)} dx_2' + \mathbf{e}_{33}^{(1)} dx_3'$$

и

$$ds'' = \mathbf{e}_{00}^{(2)} dx_0'' + \mathbf{e}_{11}^{(2)} dx_1'' + \mathbf{e}_{22}^{(2)} dx_2'' + \mathbf{e}_{33}^{(2)} dx_3'',$$

с таблицей умножения ортогональных базисных векторов

$$\mathbf{e}_{00}^{(1)} \mathbf{e}_{00}^{(2)} = \mathbf{e}_{11}^{(1)} \mathbf{e}_{11}^{(2)} = \mathbf{e}_{22}^{(1)} \mathbf{e}_{22}^{(1)} = \mathbf{e}_{33}^{(1)} \mathbf{e}_{33}^{(1)} = \varphi_1 \varphi_2 = 1,$$

$$\mathbf{e}_{ii}^{(1)} \mathbf{e}_{jj}^{(1)} = 0 \text{ при } i \neq j$$

также приводило бы к соответствующей квадратичной форме метрического пространства

$$ds' ds'' = ds^2 = dx_0'^2 + dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2.$$

Но в такой алгебре изначально бы присутствовала внутренняя «золотая» асимметрия. Возможно, такая алгебра была бы более приближена к свойствам Живой Природы, в которой повсюду проявляются «золотые пропорции».