1.5.4. Взаимосвязь обобщенных матриц Паули-Кэли с ортогональной группой преобразований *O*(2)

Напомним, что двумерная ортогональная группа преобразований $O(2)$ оставляет инвариантной квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2$.

Чтобы выполнялось равенство

$$x_1'^2 + x_2'^2 = (a_{11}\, x_1 + a_{12} x_2)^2 + (a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 \qquad (1.5.40)$$

коэффициенты a_{00}, a_{11}, a_{01}, a_{10} ($IHVH$) должны удовлетворять следующим соотношениям

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{22}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \qquad (1.5.41)$$

Данным соотношениям удовлетворяют следующие коэффициенты

$$a_{11} = \cos\beta, \quad a_{12} = -\sin\beta, \quad a_{21} = \sin\beta, \quad a_{22} = \cos\beta\,, \qquad (1.5.42)$$

которые образуют ортогональную матрицу

$$O = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & H \\ H' & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \qquad (1.5.43)$$

Напомним так же, что двумерная унитарная группа $U(2)$ преобразований оставляет инвариантной форму $|x_0|^2 + |x_1|^2$, где x_i – комплексные числа. Чтобы выполнялось равенство

$$|x_1'|^2 + |x_2'|^2 = |b_{11}\, x_1 + b_{12}\, x_2|^2 + |b_{21}\, x_1 + b_{22}\, x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2\,. \qquad (1.5.44)$$

Комплексные коэффициенты b_{00}, b_{11}, b_{01}, b_{10} ($IHVH$) должны удовлетворять следующим соотношениям

$$|b_{11}|^2 + |b_{12}|^2 = 1, \quad |b_{21}|^2 + |b_{22}|^2 = 1, \quad b_{11}\, b_{12}^* + b_{21}\, b_{22}^* = 0. \qquad (1.5.45)$$

Данным условиям удовлетворяют следующие комплексные коэффициенты

$$b_{11} = e^{i\psi}\cos\beta, \quad b_{12} = -e^{i\psi}\sin\beta, \quad b_{12} = e^{-i\psi}\sin\beta, \quad b_{22} = e^{-i\psi}\cos\beta, \quad (1.5.46)$$

которые образуют унитарную матрицу

$$U=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{01} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & H \\ H' & V \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{i\psi}\cos\beta & e^{i\psi}\sin\beta \\ -e^{-i\psi}\sin\beta & e^{-i\psi}\cos\beta \end{pmatrix}. \qquad (1.5.47)$$

Препарируем теперь двумерный элемент длины

$$l_{xy}{}^2 = x^2 + y^2. \qquad (1.5.48)$$

При переходе от метрического двухмерного пространства с метрикой (1.5.48) к двум, образующим его, аффинным пространствам имеем

$$\begin{pmatrix} l_{xy}^2 & 0 \\ 0 & l_{yx}^2 \end{pmatrix}=(\sigma_x x+\sigma_y y)(\sigma_x x+\sigma_y y)=\sigma_x\sigma_x x^2+(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x)xy+\sigma_y\sigma_y y^2=$$

$$=\sigma_x\sigma_x x^2+\sigma_y\sigma_y y^2=\begin{pmatrix} x^2+y^2 & 0 \\ 0 & y^2+x^2 \end{pmatrix}, \qquad (1.5.49)$$

где двурядные матрицы σ_x, σ_y должны удовлетворять тем же соотношениям, что и в (1.5.34)

$$\sigma_x\sigma_x=\sigma_y\sigma_y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.5.50)$$

Теперь сделаем ортогональное (или унитарное) преобразование координат x и y

$$x' = a_{11}x + a_{12}y; \qquad y' = a_{21}x + a_{22}y, \qquad (1.5.51)$$

где коэффициенты a_{00}, a_{11}, a_{01}, a_{10} ($IHVH$), согласно условию ортогональности преобразований, удовлетворяют соотношениям (1.5.41).

Подставляя (1.5.51) в (1.5.49), получим

$$\begin{pmatrix} l_{xy}^2 & 0 \\ 0 & l_{yx}^2 \end{pmatrix}=(\sigma_x x'+\sigma_y y')(\sigma_x x'+\sigma_y y')=$$

$$=\left[\sigma_x(a_{11}x+a_{12}y)+\sigma_y(a_{21}x+a_{22}y)\right]\left[\sigma_x(a_{11}x+a_{12}y)+\sigma_y(a_{21}x+a_{22}y)\right].$$

Раскрывая скобки, запишем 16 слагаемых

$$\begin{pmatrix} l_{xy}^2 & 0 \\ 0 & l_{yx}^2 \end{pmatrix} = \sigma_x\sigma_x a_{11}^2 x^2 + \sigma_x\sigma_x a_{11}a_{21}xy + \sigma_x\sigma_y a_{11}a_{12}x^2 + \sigma_x\sigma_y a_{11}a_{22}xy +$$

$$+\sigma_x\sigma_x a_{21}a_{11}xy + \sigma_x\sigma_x a_{21}^2 y^2 + \sigma_x\sigma_y a_{21}a_{12}xy + \sigma_x\sigma_y a_{21}a_{22}y^2 +$$

$$+\sigma_y\sigma_x a_{12}a_{11}x^2 + \sigma_y\sigma_x a_{12}a_{21}xy + \sigma_y\sigma_y a_{12}^2 x^2 + \sigma_y\sigma_y a_{12}a_{22}xy +$$

$$+\sigma_y\sigma_x a_{22}a_{11}xy + \sigma_y\sigma_x a_{22}a_{21}y^2 + \sigma_y\sigma_y a_{22}a_{12}xy + \sigma_y\sigma_y a_{22}^2 y^2, \quad (1.5.52)$$

которые соответствуют 16 компонентам Древа Сфирот (см. п. 0.20 в [18]).

Восстановление $\lambda_{m\div n}$-вакуума в теории дуплетов осуществляется в результате суперпозиции двумерного дуплета элемента длины и антидлины:

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & -(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.5.53)$$

Наибольшую полноту данной теории придает матричное выражение состоящее из четырех ($IHVH$) слагаемых приводящих в среднем (в сумме) к нулевой матрице (т. е. к вакуумному условию):

$$\underset{i}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{I}{\begin{pmatrix} x^2+y^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2 \end{pmatrix}} + \underset{H}{\begin{pmatrix} -x^2+y^2 & 0 \\ 0 & -x^2+y^2 \end{pmatrix}} + \underset{V}{\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 0 \\ 0 & x^2-y^2 \end{pmatrix}} + \underset{H'}{\begin{pmatrix} -x^2-y^2 & 0 \\ 0 & -x^2-y^2) \end{pmatrix}}, \qquad (1.5.54)$$

где учтены все четыре возможные сигнатуры (топологии) двумерного пространства: (+ +), (– +), (+ –), (– –), см. рис. 1.2.23.