1.6.3. $b_{\mu\eta}$-матрицы

В Алсигне рассматриваются квадратичные формы (1.2.62) с шестнадцатью всевозможными сигнатурами:

$ds^{(++++)2} = dx_0{}^2 + dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2$	$ds^{(----)2} = -dx_0{}^2 - dx_1{}^2 - dx_2{}^2 - dx_3{}^2$
$ds^{(---+)2} = -dx_0{}^2 - dx_1{}^2 - dx_2{}^2 + dx_3{}^2$	$ds^{(+++-)2} = dx_0{}^2 + dx_1{}^2 + dx_2{}^2 - dx_3{}^2$
$ds^{(+--+)2} = dx_0{}^2 - dx_1{}^2 - dx_2{}^2 + dx_3{}^2$	$ds^{(-++-)2} = -dx_0{}^2 + dx_1{}^2 + dx_2{}^2 - dx_3{}^2$
$ds^{(+---)2} = dx_0{}^2 - dx_1{}^2 - dx_2{}^2 - dx_3{}^2$	$ds^{(-+++)2} = -dx_0{}^2 + dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + x_3{}^2$
$ds^{(--+-)2} = -dx_0{}^2 - dx_1{}^2 + dx_2{}^2 - dx_3{}^2$	$ds^{(++-+)2} = dx_0{}^2 + dx_1{}^2 - dx_2{}^2 + dx_3{}^2$
$ds^{(-+--)2} = -dx_0{}^2 + dx_1{}^2 - dx_2{}^2 - dx_3{}^2$	$ds^{(+-++)2} = dx_0{}^2 - dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2$
$ds^{(+-+-)2} = dx_0{}^2 - dx_1{}^2 + dx_2{}^2 - dx_3{}^2$	$ds^{(-+-+)2} = -dx_0{}^2 + dx_1{}^2 - dx_2{}^2 + dx_3{}^2$
$ds^{(++--)2} = dx_0{}^2 + dx_1{}^2 - dx_2{}^2 - dx_3{}^2$	$ds^{(--++)2} = -dx_0{}^2 - dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2$

(1.6.20)

Каждую из них можно «расслоить», подобно тому, как это было проделано с квадратичной формой (1.6.10):

$$\left(ds_{ii}^{(a,b)2}\right) = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_{\mu}^{(a)}\gamma_{\eta}^{(b)}dx^{\mu}dx^{\eta}\ , \qquad (1.6.21)$$

где произведение

$$\gamma_{\mu}{}^{(a)}\gamma_{\eta}{}^{(b)} = b_{\mu\eta}{}^{(ab)}$$

для каждой метрики (1.6.20) должно приводить к $b_{\mu\eta}{}^{(ab)}$-матрице с соответствующей сигнатурой:

$$b_{\mu\eta}^{00}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{10}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{20}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{30}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};$$

$$b_{\mu\eta}^{01}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{11}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{21}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{31}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};$$

$$b_{\mu\eta}^{02}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{12}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{22}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{32}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};$$

$$b_{\mu\eta}^{03}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{13}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{23}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix};\quad b_{\mu\eta}^{33}=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

(1.6.22)

Знаки перед единицами в диагональных $b_{\mu\eta}^{(ab)}$-матрицах соответствуют наборам знаков в компонентах матрицы сигнатур (1.3.31)

$$\begin{matrix}(++++)^{00} & (+++-)^{10} & (-++-)^{20} & (++-+)^{30}\\ (---+)^{01} & (-+++)^{11} & (--++)^{21} & (-+-+)^{31}\\ (+--+)^{02} & (++--)^{12} & (+---)^{22} & (+-++)^{32}\\ (--+-)^{03} & (+-+-)^{13} & (-+--)^{23} & (----)^{33}.\end{matrix}$$