1.8.9. Связь Алсигны с теориями суперструн

В середине XVI в. итальянские алгебраисты Гироламо Кардано и Рафаель Бомбелли написали квадратный корень из –1. *Потребовалось почти 300 лет, чтобы разобраться, что это означает и ввести в математический и физический обиход комплексные числа [48].*

Ирландский математик Виллиам Рован Гамильтон потратил годы на поиски трехмерной числовой системы, но без результата. Наконец, 16 октября 1843 его осенила догадка: не искать в трех измерениях, а в четырех. Гамильтон назвал свои новые числа "кватернионами"[48].

Через два месяца, услышав от Гамильтона про кватернионы, Джон Грейвс, британский математик и старый друг Гамильтона еще со времен колледжа, объявил, что он нашел восьмимерную числовую систему. Он назвал эти числа "октавами". Но до того как Грейвс опубликовал свои результаты, британский адвокат-математик Артур Кэли сделал то же самое открытие, и опубликовал его как приложение к работе об эллиптических функциях. Он назвал 8-мерные числа "октонионами".

Грейвс пошел еще дальше и предположил переход от алгебр с 4-мя и 8-мью измерениями к алгебрам размерности 16, 32, 64 и т.д., для любой степени двойки. Он назвал свои 16-мерные числа "седенионами" [48].

Долгое время октавы и седенионы считались не более чем причудами викторианской математики. Ныне эти гиперкомплексные числа оказались востребованы в теории «струн», где частицы моделируются не как точеные объекты, не имеющие размеров, а как крошечные петли энергии («струны»). Эти петли могут разнообразно вибрировать, что приводит к появлению квантовых чисел типа спина, заряда и очарования. Но все это получается, только если эти «петли» многомерные, и заметаемая ими поверхность выпадает за пределы обычного четырехмерного пространства-времени.

Немаловажную роль в выборе размерности пространства, пригодного для описания поведения многомерных «струн», сыграло наличие соотношений между векторами и спинорами. Такие соотношения справедливы только в пространствах с размерностями 3, 4, 6 и 10. Это случается потому, что в пространствах с этими размерностями спиноры представляются двумя величинами из соответствующих алгебр, имеющих норму и деление:

- в 3-мерном пространстве – двумя действительными числами;
- в 4-мерном пространстве – двумя комплексными числами;
- в 6-мерном пространстве – двумя кватернионами;
- в 10-мерном пространстве – двумя октавами;

Кроме того, Гурвиц (1898) показал, что тождества «qq^*= сумма квадратов» и алгебра с делением возможны только для гиперкомплексных чисел размерности 1 (действительные числа), 2 (комплексные числа), 4 (кватернионы), 8 (октавы) [49].

Все это в совокупности привело к тому, что в теории «струн» и в М-теории используют соответственно 10- и 11- мерные пространства, при этом соотношения между свойствами материи задаются октавами.

Выясняется, что между Алсигной и теорией суперструн много общего, поскольку они опираются на одни и те же алгебраические структуры: кватернионы, октавы и седенионы (см. п. 1.8.6.3. и 1.8.8) .

Далее, в теории суперструн, помимо привычных пространственно-временных координат *x, y, z* и *t,* используются антикоммутирующие координаты θ_1 *и* θ_2 (такие, что $\theta_1\theta_2 + \theta_2\theta_1 = 0$). Имеется весьма изящное обобщение традиционного пространства-времени, включающее подобные антикоммутирующие измерения. В таком так называемом «суперпространстве» имеют место преобразования, позволяющие отобразить ось x в y поворотом, или x в t – отображением, а также преобразования, поворотом переводящие квантовые координаты θ в пространственные x.

Суперсимметричными теориями называются теории квантовых полей в суперпространстве, где поля являются функцией не только пространственно-временных, но и суперпространственных координат θ. По этим вновь введенным координатам положение измеряется уже не обычными, а грассмановыми числами. Эти числа антикоммутативны, то есть, умножая некую величину на два таких числа в прямой последовательности, мы получаем противоположный по знаку результат, чем при умножении на два этих же числа в обратной последовательности.

В Алгебре сигнатур также имеют место два вида величин x_m *и* ζ_m *[см. например, (1.8.35)], отвечающие разным коммутативным соотношениям*
– координаты бозонного типа:

$$x_m x_k - x_k x_m = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n, \qquad x_m x_m = x_m^2 = 1, \quad \text{и} \tag{1.8.69}$$

– координаты фермионного типа:

$$\begin{aligned} &\zeta_m \zeta_k + \zeta_k \zeta_m = 0 \quad \textit{при} \quad m \neq n; \quad \textit{и} \\ &\zeta_m \zeta_m = 1 \ \textit{(эллиптические),} \quad \textit{или} \\ &\zeta_m \zeta_m = 0 \ \textit{(параболические),} \ \textit{или} \\ &\zeta_m \zeta_m = -1 \ \textit{(гиперболические),} \end{aligned} \tag{1.8.70}$$

Величины x_m *и* ζ_m *также можно интерпретировать как оси координат единого многомерного суперпространства.*

Лоренц инвариантные изотопические повороты, т. е. преобразования координат x_m *в координаты* ζ_m *могут быть определены и в рамках Алгебры сигнатур, подобно тому, как это делается в теории суперструн.*

Приведенные выше соответствия говорят о том, что между теориями суперструн и Алгеброй сигнатур много общего.